



¿Por qué vuela un avión? La eterna pregunta

Juan Miguel Suay Belenguer
Ingeniero Superior Industrial
Diplomado en Estudios Avanzados en Historia de la Ciencia
jm_suay@inves.es

¿Por qué vuela un avión? La eterna pregunta

Juan Miguel Suay Belenguer
Ingeniero Superior Industrial
Diplomado en Estudios Avanzados en Historia de la Ciencia
jm_suay@inves.es

“Un matemático, un físico y un ingeniero, quieren construir un avión. El matemático lo construye pero no vuela y no sabe por qué. Llega el físico construye uno que tampoco despegue, pero sabe por qué. Finalmente llega el ingeniero construye un aeroplano que asombrosamente despegue, le preguntan al ingeniero como lo ha hecho, responde todo orgulloso: no lo sé.”

RESUMEN

La aerodinámica es la parte de la física olvidada en los manuales de enseñanza media, sin embargo, cuantas veces los padres o profesores escuchan la eterna pregunta de sus hijos o alumnos **¿Por qué vuela un avión?**, la respuesta a esta pregunta es uno de los retos más fascinantes con los que me he encontrado a lo largo de mi labor de divulgador científico e instructor de principios de vuelo en una escuela de pilotos. Después de dar vueltas al tema he llegado a la conclusión que la mayoría de los textos de enseñanza, divulgación e incluso tratados especializados cuando dan respuesta a la pregunta emplean explicaciones conceptualmente erróneas o al menos contradictorias, esto ha generado una serie de preconceptos muy arraigados entre pilotos, ingenieros y físicos que son la causa de fuertes polémicas verbales y escritas. En esta ponencia intentaré mostrar una aproximación histórica de cómo se ha llegado a la situación actual y que vías hay que seguir para intentar explicar conceptualmente los principios físicos implicados en el vuelo de un avión.

1.- Máquinas voladoras más pesadas que el aire.

El hombre, que fisiológicamente no tiene adaptado su cuerpo para el vuelo, ha intentado a lo largo de la historia construir máquinas que suplan su limitación. Este desafío se materializó durante un periodo de tiempo en forma de leyendas, tradiciones, fantasías y sueños, pero por fin el hombre voló, y lo hizo valiéndose de dos tipos de máquinas: los aerostatos y los aerodinos, es decir, los aparatos menos pesados que el aire y los más pesados. Los primeros tuvieron un rápido desarrollo desde finales del siglo XVIII, y se llegó a creer que sería la única forma de máquina voladora que el hombre sería capaz de construir. Así no es de extrañar que en una fecha tan reciente como 1902 el astrónomo y divulgador científico catalán José Comas y Sola, tras exponer las dificultades que presenta el vuelo mediante aerostatos, escribiera refiriéndose a la navegación aérea con aparatos más pesados que el aire¹:

Toda seguridad de movimiento se fundamenta en la solidez del apoyo. Por esta razón la navegación aérea práctica ha sido hasta ahora un mito y, lo que es más grave, será en el futuro un mito al compararla con las locomociones terrestres y marítimas. Por esto los ensayos de navegación aérea, muy loables algunos por los buenos deseos que manifiestan en sus autores, no pasaran nunca de ser o fracasos o meras curiosidades deportivas

¹ COMAS Y SOLA, J. (1902) “Algo sobre navegación aérea” *La Vanguardia* sábado 3 de mayo, p. 4.

En 1809 en un artículo publicado² por el inglés Sir George Cayley, expone que el problema de volar con un aerodino:

Se reduce a hacer que una superficie, soporte un peso dado mediante la aplicación de fuerza a la resistencia del aire

Este principio mecánico lo representó Cayley en un disco de plata³ (Fig. 1), en el que se puede ver un gráfico que detalla como una superficie, en este caso un plano, inmerso en un fluido con una determinada velocidad⁴ experimentaría una fuerza de reacción (R), que podía ser descompuesta en el sentido corriente y perpendicular a la misma, es lo que se conoce respectivamente por Resistencia (D) y Sustentación (L). Así que, la forma de contrarrestar el peso (W) de la máquina voladora no es otra que disponer de una superficie con una forma determinada que genere una gran sustentación, pero esto implica que se debe mover dentro del fluido, no solo para desplazarse sino para generar sustentación, necesitando una fuerza impulsora (E) que venza la resistencia.

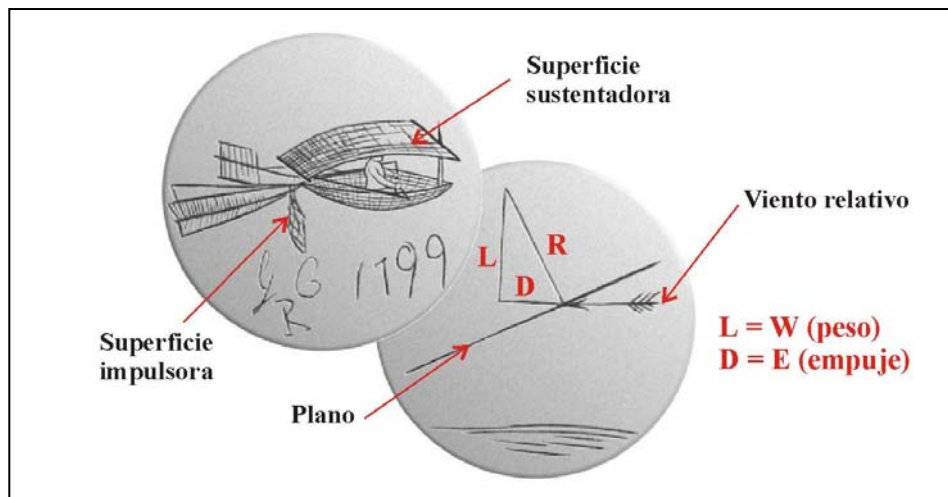


Fig. 1

El problema teórico era como predecir la forma de la superficie sustentadora (perfil aerodinámico) que generada un valor de L elevado y un valor D bajo, para velocidades relativamente bajas⁵. Los modelos teóricos existentes no solucionaban este problema, ya que, por un lado la denominada teoría de impacto predecía valores muy bajos a los obtenidos experimentalmente y los modelos diferenciales aparecidos durante los siglos

² CAYLEY, G. (1809) On Aerial Navigation. Part I. *A Journal of Natural Philosophy, Chemistry, and the Arts*, vol. 24, pp. 167 – 174, CAYLEY, G. (1810) On Aerial Navigation. Part II. *A Journal of Natural Philosophy, Chemistry, and the Arts*, vol. 25, pp. 81 – 87 y CAYLEY, G. (1809) On Aerial Navigation. Part III. *A Journal of Natural Philosophy, Chemistry, and the Arts*, vol. 24, p. 161 - 169.

³ Ésta original manera de expresar ideas se repite en la otra cara del mismo, donde se encuentra dibujada una máquina voladora, en donde sus elementos de sustentación y empuje, se encuentran simbolizados en un plano rígido y dos remos. Esta separación es una nueva concepción de lo que debe ser un aparato más pesado que el aire, ya que hasta entonces, a imitación de los pájaros, se creía que el vuelo se lograría con un sistema de alas batientes (ornitóptero), que generan la sustentación y el empuje en un mismo elemento.

⁴ Que es equivalente a que sea el cuerpo el que se mueva con la misma velocidad dentro del fluido.

⁵ Había otros problemas añadidos, pero eran de índole tecnológico, encontrar un motor ligero y potente y que la máquina fuera estable y controlable en el aire.

XVIII y XIX debidos a Euler y a Navier-Stokes eran irresolubles para el caso planteado, esto hacía que la ciencia oficial considerara que el vuelo no era posible. Por el contrario los estudios empíricos al margen de la ciencia desarrollados a lo largo del XIX, hicieron posible el vuelo en la primera década del siglo XX, unos años antes de que apareciera el modelo de Lanchester – Prandtl, también conocido como *teoría de la circulación para alas de envergadura finita*, que resultó muy eficaz ya que fue capaz de ajustar los datos experimentales mediante un modelo teórico.

2. – La teoría de impacto.

Isaac Newton, en el libro II de los *Principia*⁶, había establecido que la resistencia de los objetos inmersos en un fluido era proporcional a la dimensión lineal del cuerpo, a la densidad del fluido, al cuadrado de la velocidad y el cuadrado del seno del ángulo de incidencia. Este modelo implicaba considerar a los fluidos tanto aéreos como líquidos compuestos por corpúsculos individuales sin ningún tipo de interacción entre ellas⁷ que al chocar contra el obstáculo hay una transferencia de momento cinético, cuya suma del formado por todas las partículas es una fuerza en el objeto.

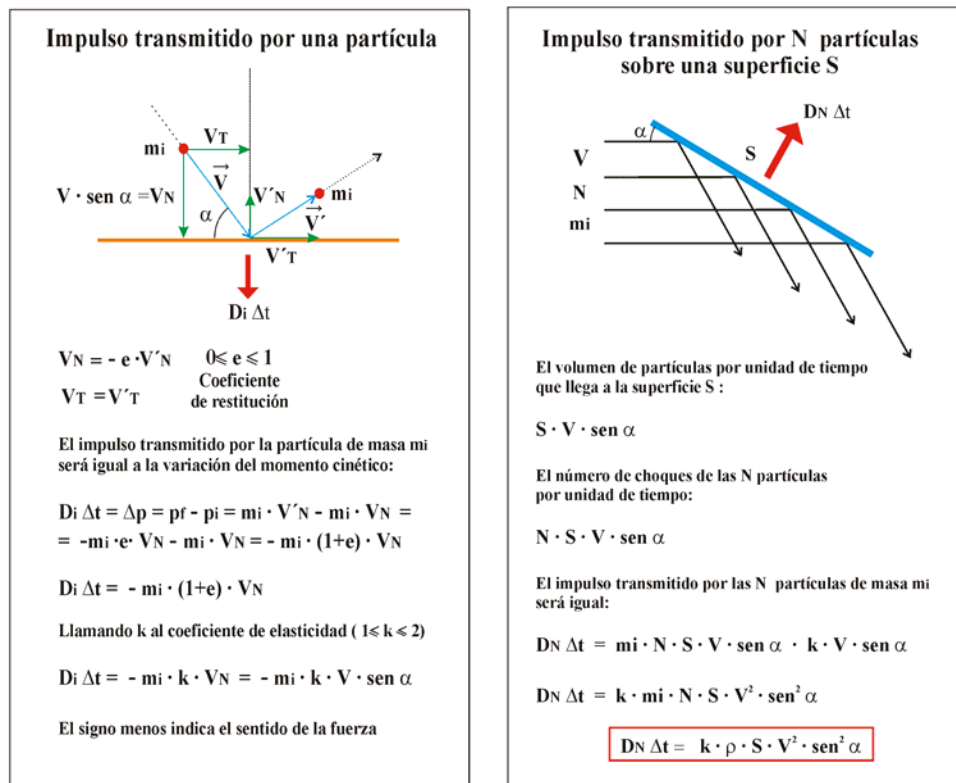


Fig. 2 Deducción de la “teoría de impacto” con métodos actuales.

⁶ Los *Principia* tuvieron tres ediciones en vida de Newton: la primera en 1687, la segunda en 1713 y la tercera en 1726. El libro II sufrió importantes revisiones en algunas de sus partes, sobre todo en el aparatado de la resistencia de los cuerpos en líquidos, debido a las críticas recibidas y a nuevos experimentos realizados.

⁷ Este modelo físico de un fluido no estaba acorde con el descrito por Newton para el aire y para el agua, pero dada las dificultades del desarrollo de un modelo matemático común para ambos, considerando al fluido compuesto de partículas individuales sin interacción denominándolo “*medium rarum*”.

Así, la resistencia D de una superficie bajo un ángulo α incidiendo una corriente fluida sería igual a:

$$D = R \cdot S \cdot v^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha$$

En 1759 el inglés John Smeaton publica en las *Philosophical Transactions of the Royal Society* un estudio⁸ en el que describe los resultados de una serie de experimentos realizados sobre el comportamiento de dos maquinas a escala reducida, con las que pretende explicar el funcionamiento de una rueda hidráulica y un molino de viento. Aplicando la teoría de impacto establece que la fuerza que ejerce una corriente de aire sobre la superficie de un plano perpendicular a la dirección del flujo es:

$$D = K \cdot S \cdot V^2$$

K es un coeficiente que Smeaton le dio un valor de 0,005. Con posterioridad se fue modificando su valor, intentado ajustar los valores a los obtenidos experimentalmente. Aun así los datos pronosticados por esta teoría estaban muy alejados de la práctica. Además no explicaba por que los perfiles curvos generaban más sustentación que los planos, pero se daba como válida, pues era coherente con los planteamientos de la ciencia mecánica de la época⁹.

3. – La mecánica de fluidos teórica y práctica durante los siglos XVIII y XIX.

Durante el siglo XVIII y XIX se produjeron importantes avances destinados a explicar de una manera teórica el comportamiento de los fluidos. Fue necesario admitir una serie de simplificaciones para abordar el comportamiento de los fluidos, como fueron la hipótesis del continuo¹⁰ y la adopción de los modelos currentilinos. Estos modelos consideraban que el medio continuo fluido no chocaba contra los objetos inmersos en él, sino que lo contornea. Si bien estos modelos se trataban muy bien matemáticamente, presentaban la dificultad de que las conclusiones eran contrarias a la práctica, e incluso paradójicas como que la resistencia de un cuerpo sumergido en una corriente fluida era nula (paradoja de D'Alambert).

Leonhard Euler escribe en 1757 tres monografías.¹¹ En ellas reduce el comportamiento

⁸ SMEATON, J. (1759) An experimental enquiry concerning the natural powers of water and wind to turn mills, and other Machines depending on a circular motion. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, vol. 51. Londres.

⁹ La teoría de impacto tuvo una gran vigencia, con modificaciones, en la aerodinámica empírica desarrollada hasta las primeras décadas del siglo XX.

¹⁰ La hipótesis del continuo considera al fluido a un nivel macroscópico como un medio continuo, es decir que se puede hablar en él de la existencia de “punto físico”, que ocupa un diferencial de volumen (dV) y que encierra un diferencial de masa (dM). Con esta hipótesis se simplifica el tratamiento matemático del fluido, ya que la presión se puede definir microscópicamente, sin recurrir a la mecánica estadística.

¹¹ EULER, L (1755). Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres, Vol XI*, Berlin. EULER, L (1755). Principes généraux du mouvement des fluides, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres, Vol XI*, Berlin. EULER, L (1755). Continuation des recherches sur la théorie de mouvement des fluides, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres, Vol XI*, Berlin.

del medio continuo fluido a un conjunto de ecuaciones diferenciales desarrolladas a partir de las leyes de Newton y definiendo a la presión como una fuerza que actúa normalmente sobre cualquier superficie interna o externa al fluido. Esta presión así definida es la que se conoce como estática. Las ecuaciones de Euler aunque simples en su planteamiento, presentaban la dificultad en su resolución. Por lo tanto prácticamente se convirtieron en una referencia fuera del alcance práctico hasta cien años después. Además habían sido deducidas con dos importantes hipótesis: los fluidos eran incompresibles y no viscosos¹², que si bien son hipótesis validas en muchas situaciones, no abarcaba la totalidad de los problemas planteados en mecánica de fluidos.

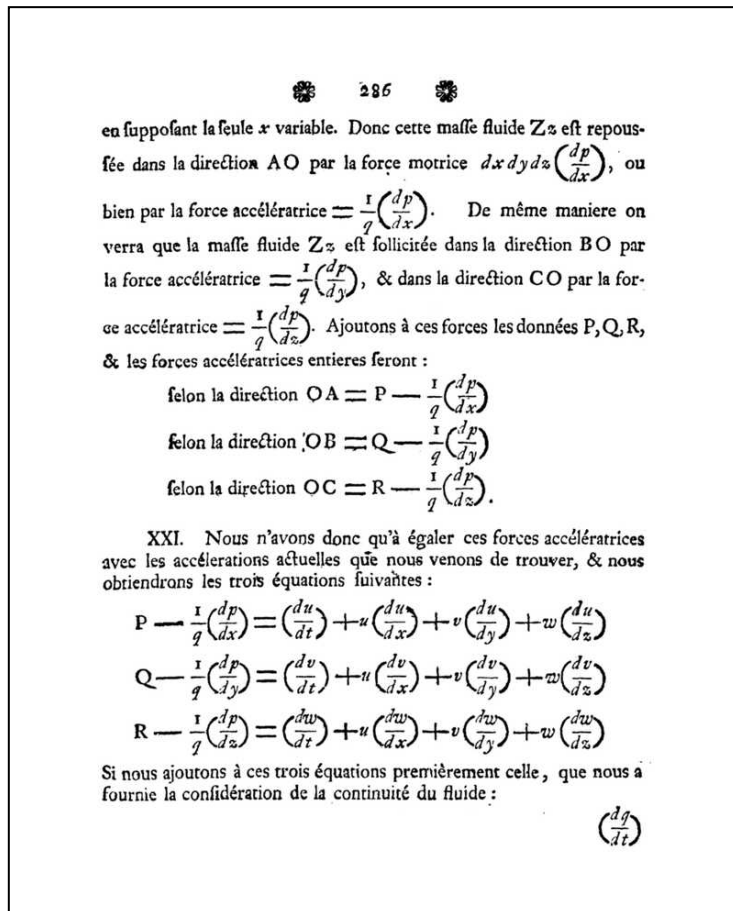


Fig. 3 Las tres ecuaciones de Euler para un fluido incompresible y no viscoso en el párrafo XXI de la memoria *Principes généraux du mouvement des fluides*

En 1738 Daniel Bernoulli publicaba su obra *Hydrodinamica*. En ella al estudiar la circulación del agua en el interior de tuberías llega a un principio, que se conoce hoy en día como “Teorema de Bernoulli”, que establece que cuando un fluido aumenta su velocidad la presión disminuye y viceversa. Este principio deducido a partir del de conservación de la energía es una solución particular a la de la ecuación de Euler.

¹² Se dice que un flujo es incompresible cuando su densidad es homogénea en todo el fluido y permanece constante con el tiempo. Un flujo viscoso newtoniano es aquel que al ser sometido a un esfuerzo cortante se deforma moviéndose con una velocidad inversamente proporcional a una constante denominada **coeficiente de viscosidad**, en el caso de que la relación no sea lineal los fluidos se denominan no-newtonianos.

Poniendo la ecuación de Euler (Fig. 3) con notación actual:

$$\rho \cdot \bar{g} - \nabla p = \rho \cdot \left[\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} \right]$$

\bar{V} : velocidad del fluido en el punto (x,y,z)

ρ : densidad del fluido

p : presión del fluido en el punto (x,y,z)

\bar{g} : fuerza másica debida a la gravedad

En el caso que el flujo sea estacionario e irrotacional,¹³ a lo largo de una línea de corriente¹⁴:

$$\rho \cdot \bar{g} - \nabla p = \rho \cdot (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho \cdot \bar{g} = -\rho \cdot g \cdot \nabla z \\ (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} \equiv \nabla \frac{V^2}{2} - \underbrace{\nabla \wedge (\nabla \wedge \bar{V})}_{\nabla \wedge \bar{V} = 0} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla \left(p + \frac{\rho \cdot V^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad p + \frac{\rho \cdot V^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z = \text{const}$$

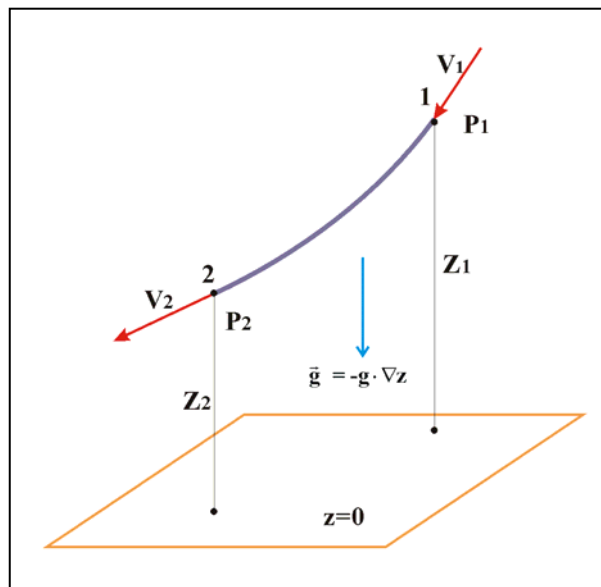


Fig. 4

¹³ Un movimiento fluido es estacionario, cuando las propiedades no varían con el tiempo dependiendo exclusivamente de la posición. Se denomina irrotacional a un flujo en que la velocidad angular local se desprecia, es decir que no existen torbellinos en su seno. Se cumple que el rotacional de la velocidad es nulo. (rot V = 0)

¹⁴ Se define como la línea que en cada uno de sus puntos es tangente al vector velocidad de una partícula de fluido en un momento dado.

$$p + \frac{\rho \cdot V^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z = \text{const} \Rightarrow (p_2 - p_1) + \frac{\rho}{2} \cdot (V_2^2 - V_1^2) + \rho \cdot g \cdot (z_2 - z_1) = \text{const}$$

Si consideramos que no se produce un descenso importante de altura en el movimiento del fluido la ecuación queda:

$$p + \frac{\rho \cdot V^2}{2} = \text{const}$$

Al término segundo de la ecuación es lo que se conoce como presión dinámica y al contrario que la estática, su efecto no es una fuerza por superficie sino, que es una energía cinética por unidad de volumen. Por lo tanto si a lo largo de una línea de corriente en un fluido, aumenta su velocidad, implica que el mismo debe disminuir su presión, ya que el aumento de presión dinámica, en ausencia de otras “fuentes de energía” debe ser a costa de la presión. No hay que olvidar que Bernoulli sólo debe aplicarse a fluidos incompresibles, no viscosos (sin rozamientos) y en presencia de un campo gravitatorio. Si se aplica fuera de estas hipótesis es una mera aproximación, pero muy buena en algunos casos.

A mitad del siglo XIX, la teoría de los flujos viscosos fue desarrollada independientemente por francés Navier en 1822 y el inglés Stokes en 1845, pero dada la dificultad matemática de la misma, permanecería en el olvido hasta la primera década del siglo XX.

$$\rho \cdot \vec{g} - \nabla p + \mu \cdot \nabla^2 \vec{V} = \rho \cdot \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right]$$

Fig. 5 Ecuación de Navier - Stokes

Además de los estudios teóricos de Euler, otros autores como Jean D’Alambert¹⁵ o Joseph Luis Lagrange,¹⁶ intentaron abordar el comportamiento de los fluidos. Pero si bien eran modelos matemáticos brillantes, no tenían ninguna repercusión en la práctica. Esto hizo que se desarrollara la hidráulica y la aerodinámica como ciencias empíricas, cultivadas por una serie de personas¹⁷ que al margen de la ciencia oficial, utilizaron una metodología a base de ensayos y modelos teóricos poco desarrollados y lograron estudiar los flujos en canales abiertos, la trayectoria de las balas de cañón en la atmósfera, la resistencia de los cascos de los barcos, las máquinas voladoras o el vuelo de los pájaros, etc.

Ciñéndonos a la aerodinámica, destacamos a Horatio Phillips¹⁸ que ensayó, con primitivos túneles de viento, que forma para una superficie expuesta a una corriente fluida eran las más adecuadas para generar una mayor sustentación. Hallando que las

¹⁵ ALAMBERT, J. (1752) *Essai d’une nouvelle théorie de la résistance des fluides*. Paris.

¹⁶ LAGRANGE, J. L. (1781) *Mémoire sur la théorie de mouvement des fluides. Histoire de l’Académie Royale des Sciences et Belles Lettres, Vol XI*, Berlin.

¹⁷ Hoy los reconoceríamos como ingenieros, artilleros o inventores aficionados.

¹⁸ PHILLIPS, H. F. (1885). *Experiments with Currents of Air. Engineering 40*, pp 160 – 161.

curvadas para un mismo ángulo de ataque¹⁹ eran mejor que las planas para obtener una mayor sustentación (Fig. 6). Los modelos teóricos existentes en la época eran incapaces

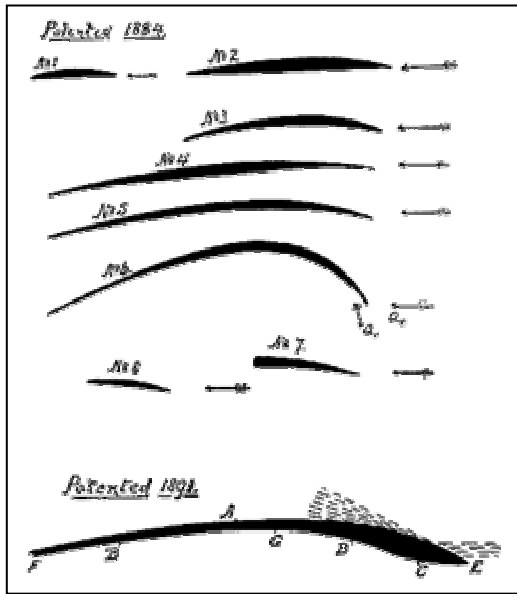


Fig. 6 Perfiles estudiados en un primitivo túnel de viento por H. F. Phillips

de explicar este hecho, sobre todo que incluso con ángulo de ataque nulo se generara sustentación. Otto Lilienthal²⁰ confirmó las observaciones de Phillips, diseñando perfiles que luego ensayaba con ayuda de planeadores que a la vez le permitían solventar los problemas del control de una máquina voladora.

No hay que olvidar los trabajos del australiano Lawrence Hargrave²¹ y de los americanos Octave Chanute²² y Langley²³ que hicieron posible que sin un fundamento teórico fuerte que explicara como se generaba la sustentación, pero con una eficaz resolución de los problemas tecnológicos inherentes a una máquina voladora, fuera posible que el 17 de diciembre de 1903 en Carolina del Norte (Estados Unidos) despegada lo que algunos consideran la primera maquina voladora más pesada que el aire que voló autopropulsada

construida por los hermanos Wilbur y Orville Wright.

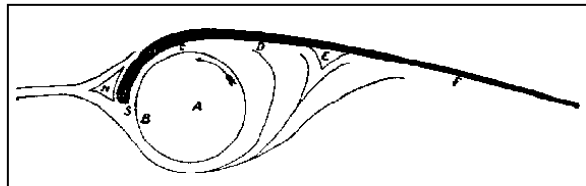


Fig. 7 Teoría errónea de Hargrave sobre la sustentación en los perfiles curvos (1887)

¹⁹ Es el ángulo que forma la dirección del viento relativo con la **cuerda** del perfil, entendida esta como la línea recta que une el **borde de ataque** (parte delantera del perfil) con el **borde de fuga** (parte trasera, aguas abajo, del perfil).

²⁰ LILIENTHAL, O. (1889) *Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst*, Berlin.

²¹ Las fuentes primarias de los trabajos de Hargrave se encuentran publicadas en la revista de la *Royal Society of New South Wales*, entre los años 1884 y 1909. Además de dos artículos publicados en la revista *Engineering*: HARGRAVE, L. (1893) *Cellular Kites*, *Engineering Vol 56, Oct 27*, pp. 523-24 y HARGRAVE, L. (1895) *Experiments on Kites* *Engineering Vol 59, Feb 15*, p. 221. Como fuentes secundarias son interesantes: CRADDOCK, D. (1994) *A...Construction Drawings for a selection of kites designed by Lawrence Hargrave*, y *A Revensbourne to Airborn*. Así como: ROUGHLEY, T.C. (1937). *The Aeronautical Work of Lawrence Hargrave*. Sydney, David Harold Paisley, Government Printer. SHAW, W. H. (1977) *Lawrence Hargrave: Explorer, Inventor and Aviation Experimenter*, Stanmore, Cassell Australia.

²² CHANUTE, O. (1997) *Progress in flying Machines. Republication of the work first published in 1894*. Nueva York, Dover Publications.

²³ LANGLEY, S. P. (1891) *Experiments in Aerodynamics. Contributions to Knowledge n° 801*. Smithsonian Institution. Washington.

4. – La teoría de la circulación y de la capa límite.

Al mismo tiempo que el aeroplano surcaba los cielos, la aerodinámica teórica experimentó un importante avance con la publicación de los trabajos de, M. W. Kutta, N. Joukowski, F. W. Lanchester y L. Prandtl

Teoría del ala bidimensional. Teorema de Kutta- Joukowski.

El estudio de la sustentación generada por un perfil alar de gran envergadura²⁴ inmerso en un fluido incompresible y no viscoso, fue abordado independientemente por W. M. Kutta²⁵ y por N. Joukowski²⁶. Veamos en que principios se basaron.

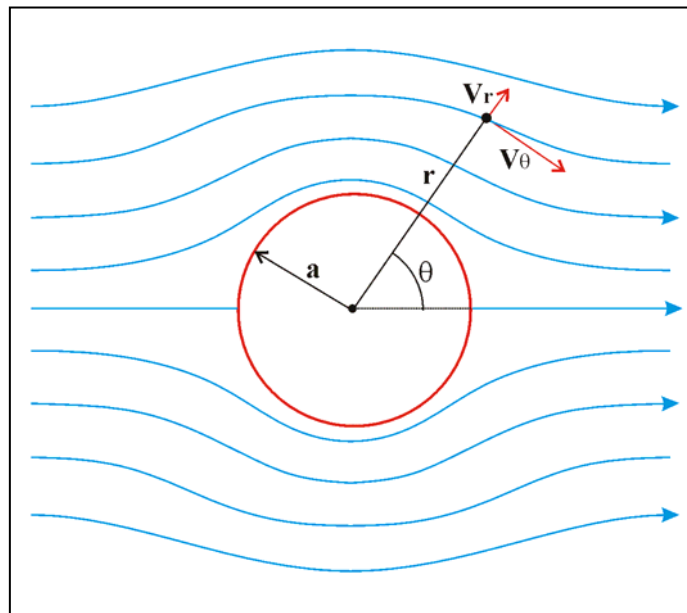


Fig. 8

Sea un cilindro de radio a y altura b , el cual se encuentra sumergido en una corriente fluida. Estudiaremos tan solo una sección bidimensional del mismo (Fig. 8), ya que suponemos que b es mucho mayor que a .

Aplicando la ecuación de Euler se puede hallar fácilmente el campo de velocidades²⁷:

$$V_r = U_\infty \cdot \cos\theta \cdot \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \quad V_\theta = -U_\infty \cdot \sen\theta \cdot \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$$

²⁴ Se conoce como **envergadura** en un ala a la distancia entre sus extremos.

²⁵ KUTTA, M.W. (1902) Auftriebskräfte in strömenden Flüssigkeiten. *Illustrierte Aeronautische Mitteilungen* 6, pp. 133-135.

²⁶ Sus ideas se publicaron originalmente en ruso, en la primera década del siglo XX, con posterioridad se publicaron en francés: JOUKOWSKI, N. (1916) *Aérodynamique*. Pasis Gauthier – Villars et C^{ie} Éditeurs.

²⁷ Ver desarrollo completo en: WHITE, F.W. (1988). *Mecánica de fluidos*. Mejico, McGraw Hill, pp. 489 – 554.

Donde U_∞ es la velocidad libre del fluido. Sobre la superficie del cilindro ($r = a$), la velocidad será:

$$V_r = 0 \quad V_\theta = -2 \cdot U_\infty \cdot \text{sen}\theta$$

Aplicando el teorema de Bernoulli entre la corriente libre y la superficie del cilindro:

$$p_\infty + \frac{\rho \cdot U_\infty^2}{2} = p_s + \frac{\rho}{2} \cdot (-2 \cdot U_\infty \cdot \text{sen}\theta)^2 \Rightarrow p_s - p_\infty = \frac{\rho \cdot U_\infty^2}{2} \cdot (1 - 4 \cdot \text{sen}^2\theta)$$

En donde p_∞ representa la presión de la corriente incidente.

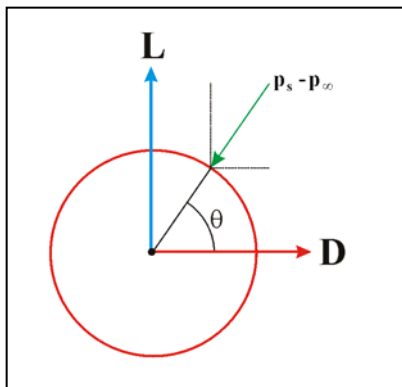


Fig. 9

La fuerza de resistencia D será la integral sobre la superficie de la componente horizontal de las fuerzas de presión y la sustentación L será la componente vertical, con el criterio de signos que se muestra en la Fig. 9. Será:

$$D = - \int_0^{2\pi} (p_s - p_\infty) \cdot \cos\theta \cdot b \cdot a \cdot d\theta$$

$$L = - \int_0^{2\pi} (p_s - p_\infty) \cdot \text{sen}\theta \cdot b \cdot a \cdot d\theta$$

Sustituyendo el valor hallado para $(p_s - p_\infty)$, se obtiene que las dos integrales son nulas. Esto quiere decir que el cilindro no experimenta ni resistencia²⁸ ni sustentación.

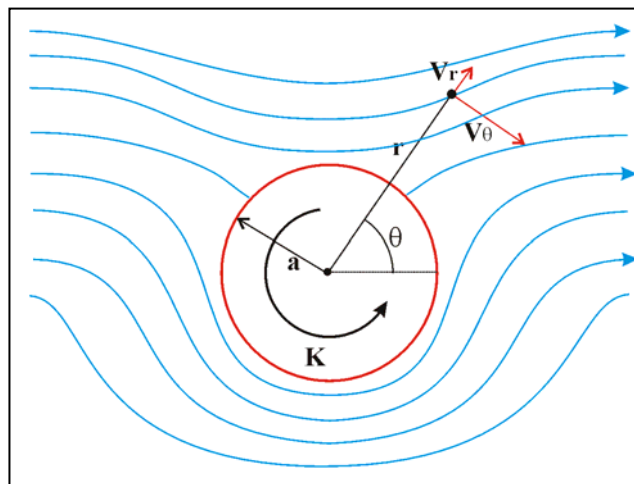


Fig. 10

²⁸ Este resultado, contrario a la experiencia, es lo que se conoce como *Paradoja de D'Alembert*, el cual publicó este resultado en 1752 (ver nota 15), reconociendo que no concordaba con lo que ocurría en los fluidos reales. No fue resuelta hasta que en 1904 el alemán Prandtl desarrolló su teoría de la capa límite.

Supongamos ahora el mismo cilindro, pero dotado de una rotación en el sentido contrario a las agujas de un reloj (Fig. 10). Se demuestra que el campo de velocidades resultante es igual a la suma del generado por un torbellino²⁹ superpuesto al flujo regular sin perturbar.

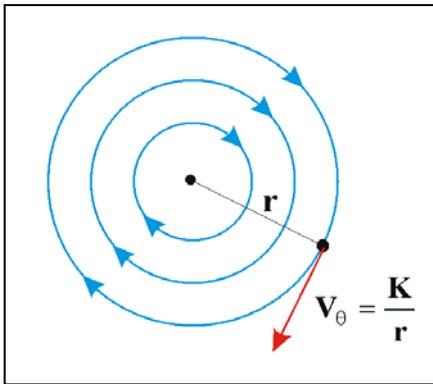


Fig. 12 Torbellino

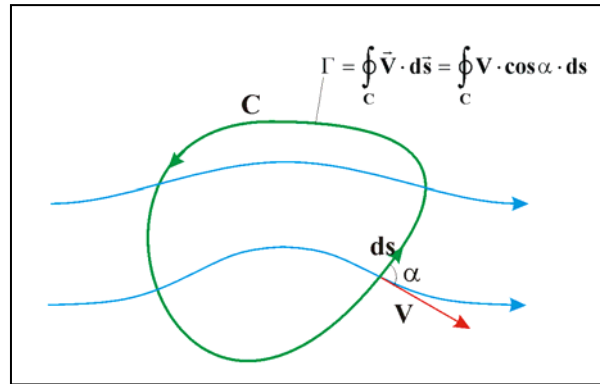


Fig. 11 Circulación

El campo de velocidades será ahora igual a:

$$V_r = U_\infty \cdot \cos\theta \cdot \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \quad V_\theta = -U_\infty \cdot \text{sen}\theta \cdot \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{K}{r}$$

Sobre la superficie del cilindro ($r = a$), la velocidad será:

$$V_r = 0 \quad V_\theta = -2 \cdot U_\infty \cdot \text{sen}\theta + \frac{K}{a}$$

Aplicando el principio de Bernoulli para el cilindro giratorio:

$$p_\infty + \frac{\rho \cdot U_\infty^2}{2} = p_s + \frac{\rho}{2} \cdot \left(-2 \cdot U_\infty \cdot \text{sen}\theta + \frac{K}{a}\right)^2 \Rightarrow p_s - p_\infty = \frac{\rho \cdot U_\infty^2}{2} \cdot (1 - 4 \cdot \text{sen}^2\theta + 4 \cdot \beta \cdot \text{sen}\theta + \beta^2)$$

$$\beta = \frac{K}{a \cdot U_\infty^2}$$

Calculando ahora la resistencia:

$$D = - \int_0^{2\pi} (p_s - p_\infty) \cdot \cos\theta \cdot b \cdot a \cdot d\theta = 0$$

Y la sustentación:

²⁹ El torbellino es un flujo circulatorio puro el cual tan solo posee velocidad tangencial, esta se hace infinita en el origen. Viene caracterizado por un valor K denominado intensidad del torbellino.

$$L = - \int_0^{2\pi} (\mathbf{p}_s - \mathbf{p}_\infty) \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \cdot d\theta = - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_\infty^2 \cdot \frac{4 \cdot \mathbf{K}}{\mathbf{a} \cdot U_\infty} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cdot d\theta = -\rho \cdot U_\infty \cdot (2 \cdot \pi \cdot \mathbf{K}) \cdot \mathbf{b}$$

Expresada por unidad de envergadura:

$$\frac{L}{b} = -\rho \cdot U_\infty \cdot (2 \cdot \pi \cdot \mathbf{K})$$

Ahora se introduce el concepto de circulación a lo largo de una curva C como la integral a lo largo de la misma del producto de la velocidad por la longitud del arco ds . (Fig. 11)

$$\Gamma = \oint_C \bar{\mathbf{V}} \cdot d\bar{\mathbf{s}} = \oint_C \mathbf{V} \cdot \cos \alpha \cdot ds$$

La circulación a lo largo de una circunferencia de radio r que contenga el núcleo de un torbellino tiene por valor:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{V}_\theta \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{K}}{r} \cdot r \cdot d\theta = 2 \cdot \pi \cdot \mathbf{K}$$

Luego:

$$\frac{L}{b} = -\rho \cdot U_\infty \cdot (2 \cdot \pi \cdot \mathbf{K}) = -\rho \cdot U_\infty \cdot \Gamma$$

Por lo tanto de acuerdo con la teoría no viscosa, la sustentación por unidad de envergadura de un cilindro inmerso en una corriente uniforme es igual a:

$$\rho \cdot U_\infty \cdot \Gamma$$

Donde Γ es la circulación total alrededor del cuerpo. La dirección de la sustentación se obtiene girando 90° la dirección de la corriente incidente, en el sentido opuesto a la circulación.³⁰

Este resultado explicaba “Efecto Magnus”³¹ que se produce, por ejemplo en las pelotas de tenis o de golf, las cuales, si se lanzan provistas de un giro desvían su trayectoria por la aparición de una sustentación positiva o negativa, dependiendo si giran en el mismo sentido de avance o el contrario, consiguiendo así un mayor o menor alcance.

Pero lo que se cumple para un cilindro circular con una circulación asociada se cumple también para cualquier contorno cerrado, es lo que se conoce como el teorema de Kutta – Joukowski:

En una corriente bidimensional irrotacional [flujo incompresible y no viscoso], siendo uniforme su velocidad en el infinito de valor U_∞ , fluyendo alrededor de

³⁰ JOUKOWSKI, N. (1916) *Aérodynamique...* Op. Cit, p. 139.

³¹ Debe su nombre a G. Magnus que publicó la memoria: MAGNUS, G. (1852) On the derivation of projectiles; and on a remarkable phenomenon of rotating bodies. *Memoirs of the Royal Academy, Berlin*. traducción al inglés en *Scientific Memoirs, London* (1853), p. 210. Editada por John Tyndall and William Francis. También es de destacar el estudio: RAYLEIGH, LORD (1877) On the Irregular Flight of a Tennis Ball. *Messenger of Mathematics*, 7, 14.

un contorno en el que la circulación alrededor del mismo es igual a Γ , la resultante de las presiones del fluido sobre el contorno es igual al producto del vector que representa la velocidad de la corriente en el infinito por la circulación y por la densidad del fluido. La dirección de la fuerza se obtiene girando 90° la dirección de la corriente incidente, en el sentido opuesto a la circulación.^{32 33}

$$\mathbf{L} = -\rho \cdot \mathbf{U}_\infty \cdot \Gamma$$

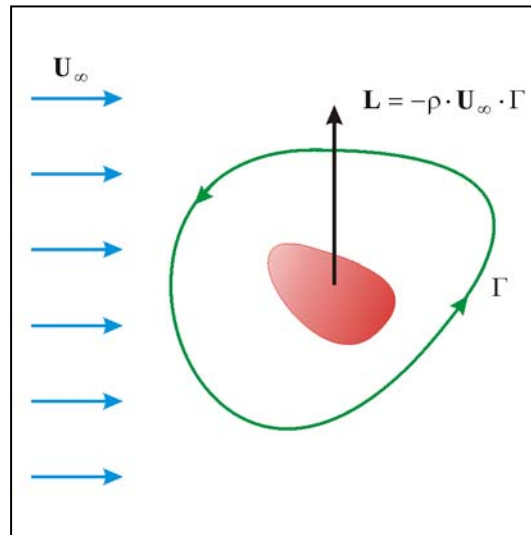


Fig. 13 Teorema de Kutta - Joukowski

Lo que nos viene a decir que la sustentación depende, de la circulación que tengamos alrededor de un contorno arbitrario. El problema que se planteaba ahora, era precisamente determinar la circulación neta como función de la forma del perfil y el ángulo de ataque, pues así hallaríamos la sustentación generada.

Joukowski empleó un método matemático conocido como transformación conforme basado en las propiedades de las funciones de variable compleja³⁴. Sin entrar en detalles la aplicación elegida transformaba contornos en los que se conocía su campo de velocidades (cilindros con circulación) en otro campo alrededor de un perfil con forma aerodinámica geoméricamente definido por la transformación. Una de las propiedades que poseía esta transformación, era que la circulación alrededor del contorno origen era igual a la del contorno imagen. Por lo tanto si transforma un cilindro circular con una circulación Γ , ésta será la misma alrededor del contorno (Fig. 16).

Pero al igual que la forma del campo de velocidades en un cilindro con circulación, no

³² Ver demostración del teorema en: JOUKOWSKI, N. (1916) *Aérodynamique...* Op. Cit, p. 139-142.

³³ La idea de que la sustentación era producida por una circulación tiene un precedente en la obra del ingeniero inglés Frederick W. Lanchester en una conferencia ante la Birmingham Natural History and Philosophical Society en 1894, después fue publicada en dos libros en 1907 titulados *Aerodynamics* y *Aerodnetics*, cuando ya era conocida la obra de Kutta y Joukowski.

³⁴ Aparte de la transformación conforme, que fue la primera, existen otros métodos de análisis de las superficies sustentadoras, todos ellos basados en la teoría de la circulación y la condición de Kutta. Ver: ANDERSON, J. D. (2001) *Fundamentals of Aerodynamics*. Boston, McGraw Hill, pp. 277 – 349.

es único sino que depende de la circulación elegida, lo mismo ocurrirá en el perfil imagen. Por lo tanto habrá que elegir una circulación que fijara alguna propiedad física del mismo. Los perfiles aerodinámicos tienen el borde de fuga afilado, Kutta estableció que para que el campo de velocidades no posea una singularidad en este punto, las velocidades del fluido en las superficies superior e inferior deben ser iguales al abandonar el perfil. Esto generalmente se traduce en que se anule la velocidad en el borde de salida. Es decir que exista un punto de remanso. Con esta hipótesis, conocida como Condición de Kutta, el problema de la sustentación de un perfil se reduce a:

Determinar la magnitud de la circulación, de modo tal que la velocidad de la corriente que deja la superficie superior en el borde de fuga, sea igual a la corriente que deja la superficie inferior.

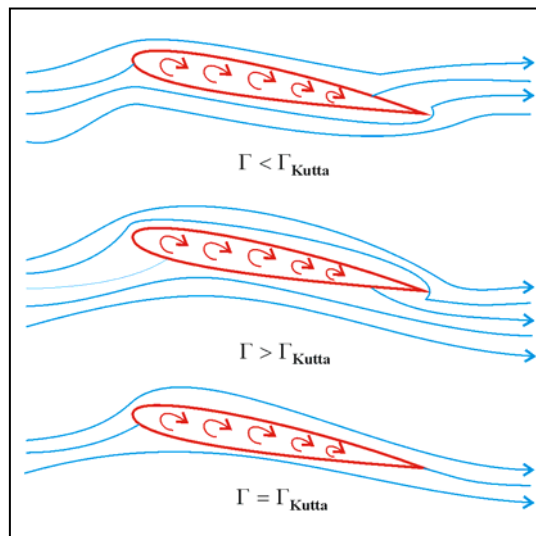


Fig. 14 Condición de Kutta

Con esta condición, se halla una única circulación, que sustituida en la fórmula de Kutta-Joukowski permite calcular la fuerza de sustentación.

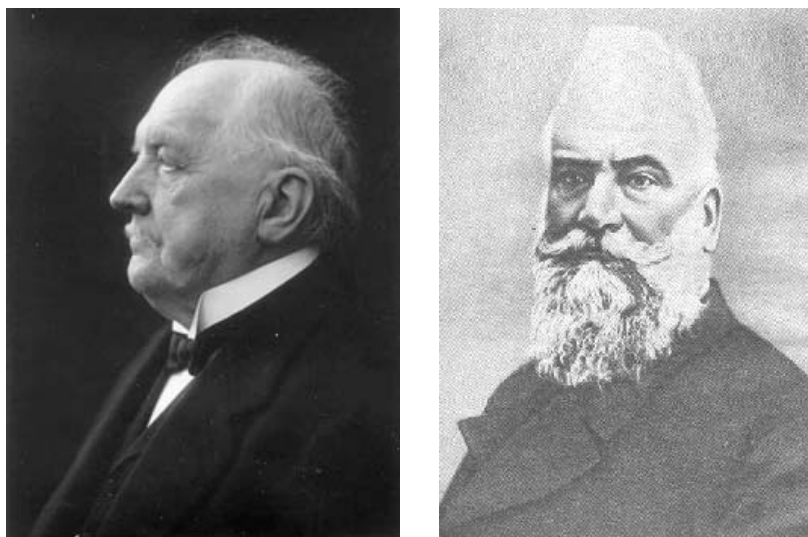


Fig. 15 M. W. Kutta (1867-1944) y N. E. Joukowski (1847-1921)

El modelo matemático resulta tan eficaz, que los datos hallados teóricamente se ajustaban bastante bien a la práctica. Tal como se muestra en la Fig. 17, en ella se ha representado el coeficiente de sustentación C_L en función del ángulo de ataque, α , para un perfil o sección de ala típico. El coeficiente de sustentación es una cantidad adimensional que se obtiene dividiendo la fuerza de sustentación por unidad de envergadura del ala, por la longitud (c) de la cuerda y la presión dinámica.

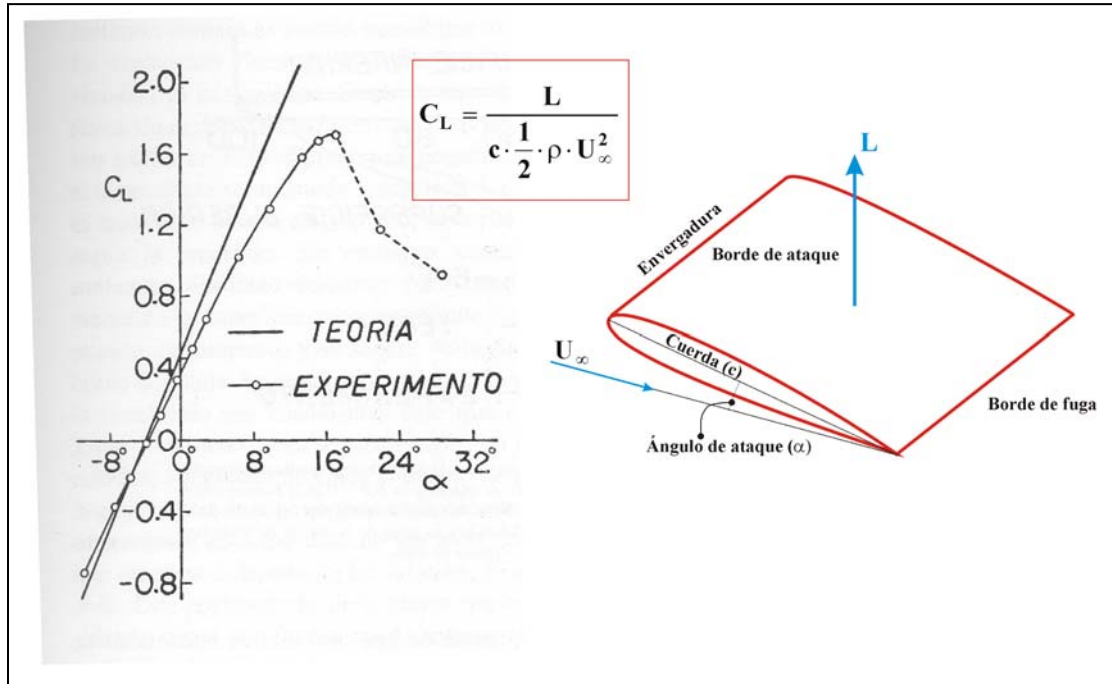


Fig. 17 Coeficiente de sustentación del perfil NACA 4412 en función del ángulo de ataque³⁵

Podemos apreciar que la utilidad de la teoría, se limita a una gama de ángulos de ataque que comprende ángulos relativamente pequeños, tanto positivos como negativos. Fuera de esta gama, la sustentación medida es mucho menor que el valor predicho por la teoría. La explicación física de esta discrepancia (basada en observaciones visuales) es la siguiente: Como se dijo anteriormente, la sustentación de un ala es debida a la diferencia de presión entre las superficies superior e inferior. Esta diferencia de presión se puede mantener solamente si la corriente se acomoda a seguir la forma de la superficie. Cuando el ángulo de ataque es pequeño, la corriente tiene poca dificultad en seguir la superficie. Sin embargo, cuando el ángulo crece, el aire encuentra dificultad creciente para mantener el contacto, especialmente en la superficie superior, donde ha de abrirse paso contra una presión en aumento, y se separa de la superficie antes de alcanzar el borde de salida. La separación origina, en primer lugar, que el valor de la circulación sea mucho más bajo que el prescrito por la condición Kutta-Joukowski, y en segundo lugar, un decrecimiento real de la circulación a medida que crece el ángulo de ataque. Así, existe un cierto ángulo crítico de ataque para cada sección de ala, que al superarlo, la sustentación no solamente no aumenta con el ángulo de ataque, sino que empieza a disminuir. En tal caso, el ala se dice que entra en *pérdida*

³⁵ KARMAN, T (1954) *Aerodinámica. Temas seleccionados a la luz de su desarrollo histórico*. Madrid, INTAET, p.45.

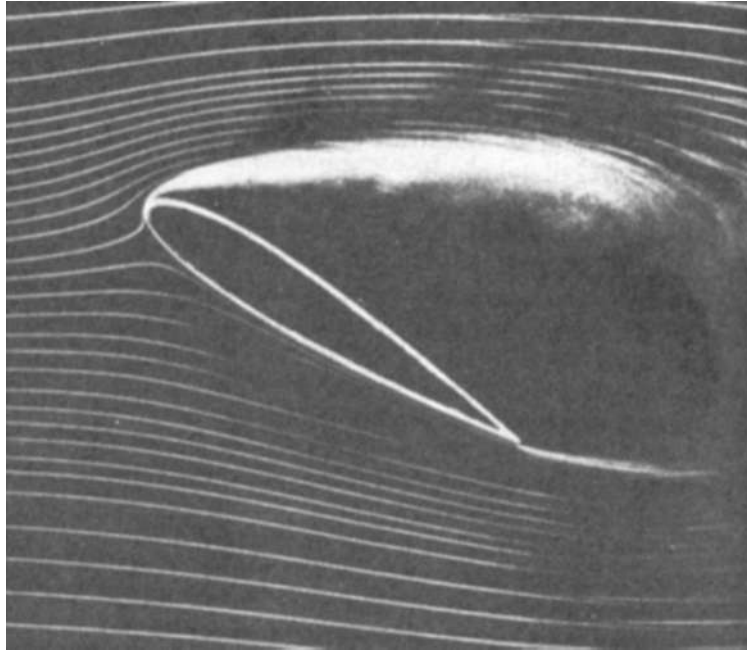


Fig. 18 Perfil en “perdida”

Teoría del ala tridimensional. Teoría de la línea de sustentación de Prandtl

En 1907, el ingeniero inglés F. W. Lanchester, como ya hemos comentado³⁶, fue el primero que tuvo la idea de que la sustentación era consecuencia de la circulación³⁷ de la velocidad entorno al ala. Pero al contrario que Kutta y Joukowski, planteó el problema suponiendo que el ala tiene una envergadura finita. Lanchester consideró que la circulación era un torbellino ligado al ala, es decir que se desplazaba con ella, y al llegar a los extremos abandona la misma en forma de dos torbellinos libres que se extendían corriente abajo. (Fig. 19)

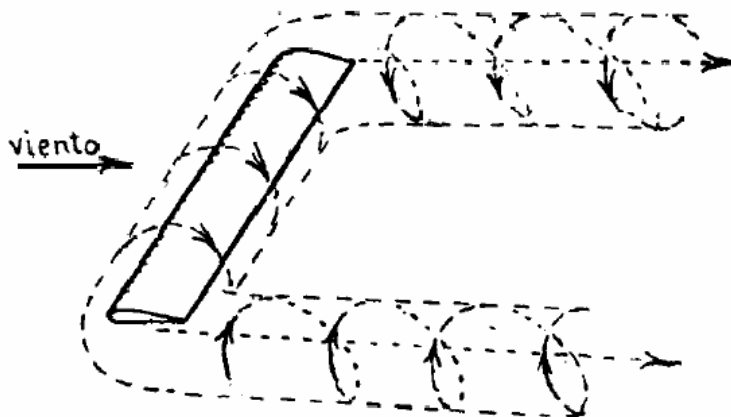


Fig. 19 Torbellinos libres abandonando un ala de envergadura finita

³⁶ Ver Nota 33.

³⁷ Le llamó movimiento *períptero*.

El sistema de torbellinos libres daba lugar a un campo de velocidades, la componente vertical se conoce como *deflexión*. Ésta se manifestaba con la aparición tras el ala de una corriente de aire hacia abajo, que por el principio de conservación de la cantidad de movimiento, es consecuencia de una fuerza, que no es otra que la sustentación. Así Lanchester estableció que el trabajo necesario para obtener sustentación es igual a la energía cinética del campo de deflexión, es decir, si el ala fuera infinita, este trabajo no sería necesario. Por lo tanto dos alas de igual superficie y que generen la misma sustentación, el trabajo para generarla es menor para el ala de mayor envergadura³⁸.

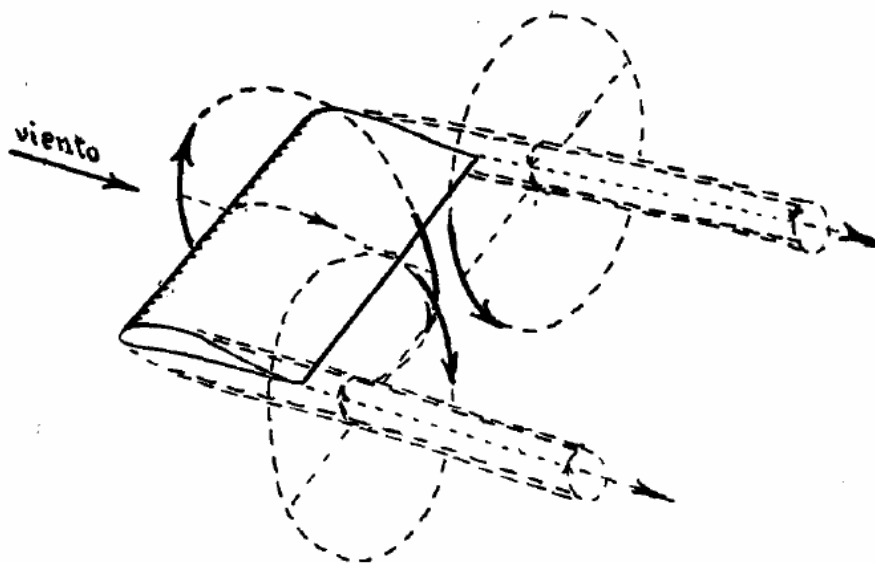


Fig. 20 Componente vertical del campo de velocidades inducida³⁹

La *deflexión*, hace que se genere una resistencia al avance del ala que no existía en el caso del ala de gran envergadura. Es la que se conoce como *resistencia inducida*⁴⁰. El campo de velocidades por delante del borde de ataque, es ascendente debido al efecto del torbellino transversal del ala (Fig. 20), pero detrás del borde de salida la velocidad es descendente, debido a la deflexión, y de mayor intensidad, ya que se suman los efectos del triple del torbellino transversal del ala y de sus dos prolongaciones a partir de los extremos. Esta diferencia de velocidades verticales del aire, por delante y por detrás del ala, tiene que producir, según el teorema de Bernouilli, una mayor presión por delante y por tanto, una fuerza de resistencia hacia atrás.

Otra consecuencia de la aparición de la deflexión es la disminución del ángulo de ataque con el que el fluido incide sobre el perfil, respecto al caso del ala de envergadura finita. Así, un ala estará sometida a un ángulo de ataque α_{eff} menor que el ángulo de ataque

³⁸ Esta idea se relaciona con lo que se conoce como **alargamiento** que es la relación entre la envergadura y la cuerda de un ala. Este parámetro es de vital importancia en relación con el trabajo necesario para generar la sustentación.

³⁹ La Fig. 19 y la Fig. 20 están sacadas de: HERRERA, E. (1936) *Aerotecnia*, Madrid, Gráficas Ruiz Ferri pp.83 – 4.

⁴⁰ Esta resistencia es de distinta naturaleza a la llamada **resistencia parásita** debida a los efectos viscosos del fluido.

geométrico α , cumpliéndose:

$$\alpha_{\text{eff}} = \alpha - \alpha_i$$

α_i es lo que se conoce como *ángulo inducido*.

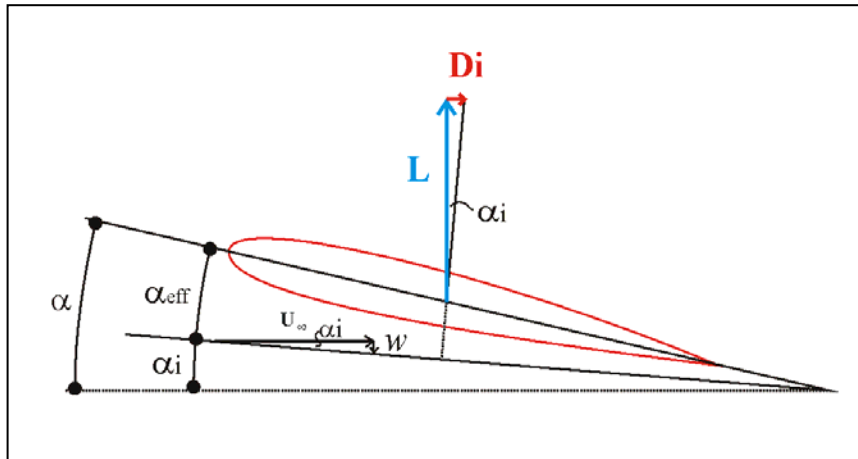


Fig. 21 ángulo inducido

La fuerza resultante sobre el perfil, será perpendicular a la dirección de la corriente relativa del fluido en las proximidades del ala, pero como la sustentación se ha definido como perpendicular a la corriente libre, se observa (Fig. 21) que ésta tiene un valor menor que la fuerza resultante sobre el ala y esta girada un ángulo α_i . La otra componente en la dirección de la corriente libre es la *resistencia inducida*.



Fig. 22 Visualización de los torbellinos desprendidos del extremo de un ala

La formulación matemática de todas estas ideas se debió al ingeniero alemán L. Prandtl⁴¹, quien lo abordó de la siguiente manera:

Supuso que el ala era lo que llamó *línea de sustentación*, es decir una línea de torbellino provista de una circulación Γ con forma de herradura. (Fig. 23)

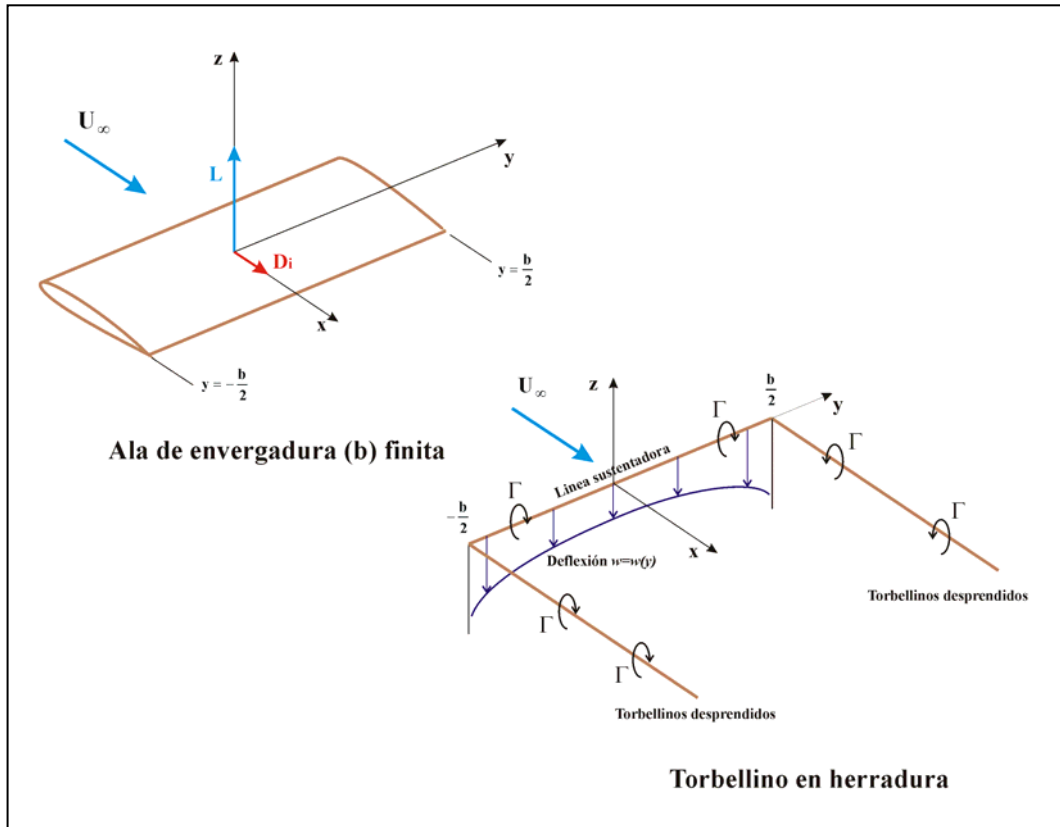


Fig. 23 Modelo del ala de envergadura finita como una línea de torbellino en herradura

Con este modelo se puede hallar la deflexión a lo largo del ala $w(y)$ en función de la circulación Γ y por la relación geométrica de la Fig. 21:

$$\alpha_i(y) = \arctan\left(\frac{-w(y)}{U_\infty}\right) \approx \frac{-w(y)}{U_\infty}$$

Para el cálculo de $w(y)$ hay que recordar la expresión de la *Ley de Biot – Savart*, que dice que el campo de velocidades inducido por un hilo de torbellino de circulación Γ a una distancia r del mismo, se puede calcular mediante la expresión:

$$d\vec{V} = \frac{\Gamma}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

⁴¹ PRANDTL, L. (1919) Tragflügeltheorie. *Göttinger Nachrichten, mathematisch-physikalische Klasse*, pp. 451-477. Existe traducción al inglés: PRANDTL, L.; TIETJENS, O.G. (1957) *Applied Hydro- and Aeromechanics* New Cork, Dover Publications, Inc, pp. 185 – 225.

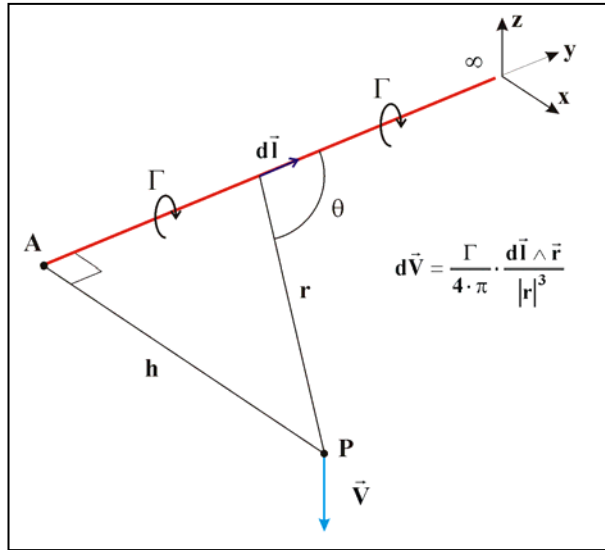


Fig. 24

Entonces si tenemos una línea de torbellino que se inicia en A y se extiende hasta el infinito (Fig. 24), el campo de velocidades en un punto P situado a una distancia h perpendicular en A, será igual:

$$\vec{V} = \int_0^{\infty} \frac{\Gamma}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \Rightarrow V = \frac{\Gamma}{4 \cdot \pi} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}\theta}{r^2} \cdot dl \Rightarrow \left. \begin{array}{l} r = \frac{h}{\text{sen}\theta} \\ l = \frac{h}{\text{tan}\theta} \Rightarrow dl = -\frac{h}{\text{sen}^2\theta} \cdot d\theta \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\Gamma}{4 \cdot \pi \cdot h} \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \text{sen}\theta \cdot d\theta = \frac{\Gamma}{4 \cdot \pi \cdot h}$$

Por lo tanto el campo de velocidades en un punto y de la línea sustentadora (Fig. 23), será:

$$w(y) = -\frac{\Gamma}{4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{b}{2} + y\right)} - \frac{\Gamma}{4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{b}{2} - y\right)} = -\frac{\Gamma}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{b}{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2}$$

Prandtl y sus colaboradores⁴² se dieron cuenta de que la distribución de velocidades resultante no se ajustaba a la realidad, y además el sistema de torbellinos reales existentes en la estela de un ala (Fig. 25), no era tan simple para ser modelizado por tan solo una línea de torbellinos en herradura.

⁴² Entre los que hay que destacar M. M. Munk y T. Kármán.

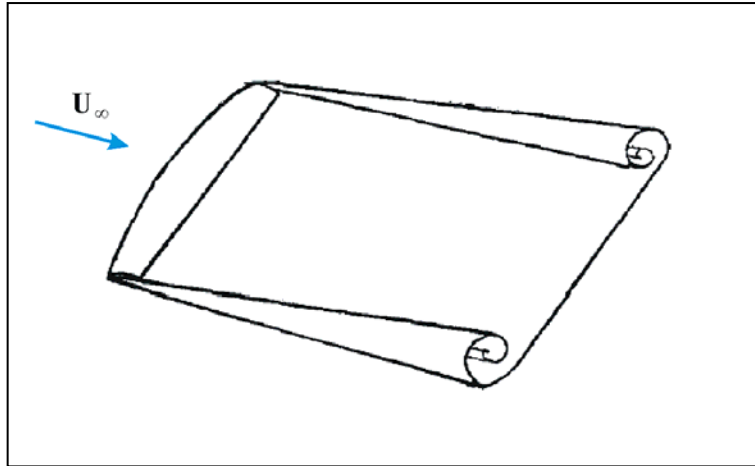


Fig. 25 Sistema de torbellinos reales en la estela de un ala

El modelo se resolvió, gracias a la superposición de un número infinito de torbellinos en herradura.

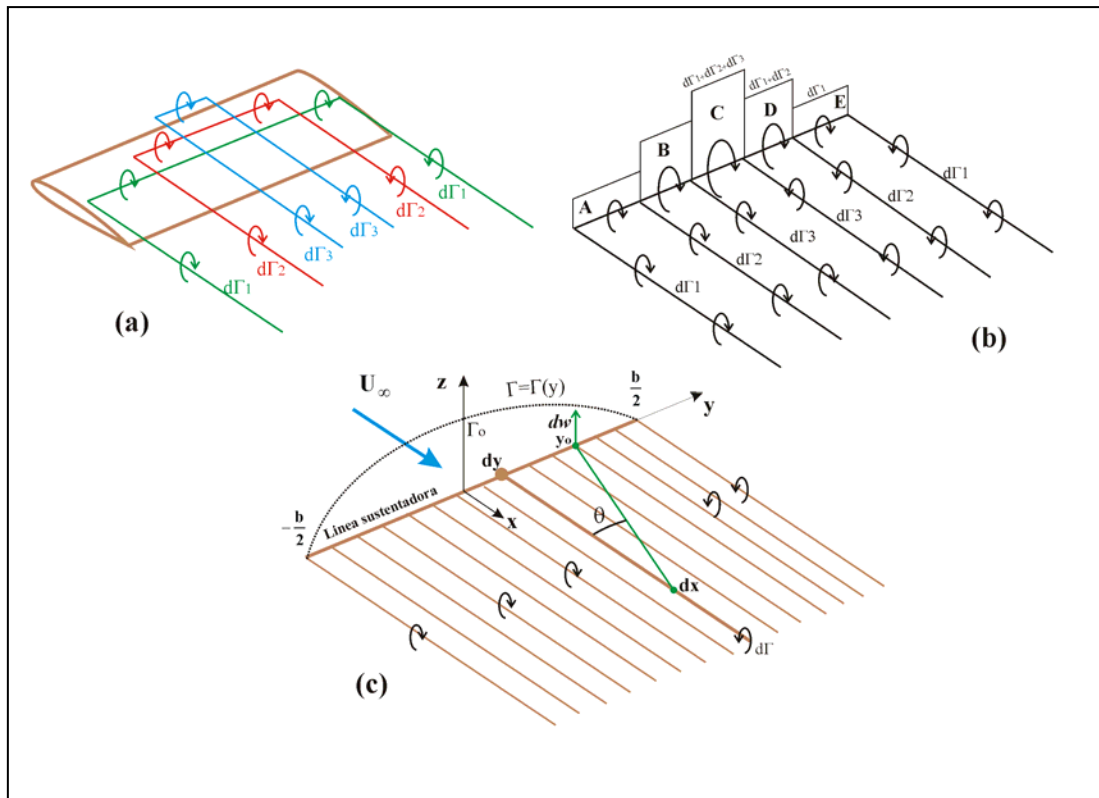


Fig. 26

Supongamos que superponemos tres torbellinos en herradura para modelizar el ala (Fig. 26a), cada uno de ellos caracterizado por una circulación $d\Gamma_i$. Esto se traduce en que a lo largo de la envergadura la circulación ya no será constante (Fig. 26b), ya que en el tramo A y E valdrá $d\Gamma_1$, en el B y D valdrá $d\Gamma_1 + d\Gamma_2$ y en E su valor será $d\Gamma_1 + d\Gamma_2 + d\Gamma_3$. Si consideramos ahora que disponemos de infinitos torbellinos (Fig. 26c), la circulación a lo largo de la envergadura será una función $\Gamma(y)$, que se anula en los

extremos del ala y tiene por valor máximo Γ_0 . Esto significa que la sustentación también variará a lo largo de la envergadura. Es lo que se conoce como una *línea sustentadora*, tras ella se extiende una capa de torbellinos.

Si consideramos un elemento diferencial dy de la línea sustentadora. La circulación en y es $\Gamma(y)$, la variación de circulación sobre dy se puede expresar por:

$$d\Gamma = \left(\frac{d\Gamma}{dy} \right) \cdot dy$$

Perpendicular a dicho elemento parte un torbellino diferencial de circulación $d\Gamma$, que generará en y_0 una deflexión dw (Fig. 24):

$$dw = - \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy} \right) \cdot dy}{4 \cdot \pi \cdot (y_0 - y)}$$

Luego la deflexión total creada por el torbellino diferencial que parte de y_0 será:

$$w(y_0) = - \frac{1}{4 \cdot \pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{(d\Gamma/dy) \cdot dy}{y_0 - y}$$

El ángulo inducido vale:

$$\alpha_i(y_0) = \arctan\left(\frac{-w(y_0)}{U_\infty} \right) \approx \frac{-w(y_0)}{U_\infty} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot U_\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{(d\Gamma/dy) \cdot dy}{y_0 - y}$$

La sustentación en y_0 vale por el Teorema de Kutta-Joukowski:

$$L(y_0) = \rho \cdot U_\infty \cdot \Gamma(y_0) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_\infty^2 \cdot c(y_0) \cdot C_L \Rightarrow C_L = \frac{2 \cdot \Gamma(y_0)}{U_\infty \cdot c(y_0)}$$

Donde $c(y_0)$ es la cuerda del ala en la posición y_0 y C_L es el coeficiente de sustentación (Fig. 17). Para un perfil delgado el coeficiente de sustentación es (Fig. 16):

$$C_L = 2 \cdot \pi \cdot \text{sen} \alpha_{\text{eff}}(y_0) \approx 2 \cdot \pi \cdot \alpha_{\text{eff}}(y_0) \Rightarrow \alpha_{\text{eff}}(y_0) = \frac{C_L}{2 \cdot \pi}$$

Luego:

$$\alpha_{\text{eff}}(y_0) = \frac{C_L}{2 \cdot \pi} = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi \cdot U_\infty \cdot c(y_0)}$$

Según (Fig. 21):

$$\alpha_{\text{eff}}(y_0) = \alpha(y_0) - \alpha_i(y_0) \Rightarrow \alpha(y_0) = \alpha_{\text{eff}}(y_0) + \alpha_i(y_0)$$

Sustituyendo los valores, obtenemos la ecuación integro-diferencial:

$$\alpha(y_0) = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi \cdot U_\infty \cdot c(y_0)} + \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot U_\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{(d\Gamma/dy) \cdot dy}{y_0 - y}$$

En esta ecuación la única incógnita es $\Gamma = \Gamma(y_0)$ ya que el resto de cantidades son características geométricas del ala. Por lo tanto podemos determinar la distribución de la sustentación a lo largo de la envergadura, conociendo la geometría del ala, es decir las distribuciones de la cuerda, sección de ala y ángulo de ataque a lo largo de la envergadura. El problema es puramente matemático, ya que se reduce en resolver la ecuación integro-diferencial⁴³.

La teoría de Prandtl tiene las siguientes limitaciones. Su primera limitación es la *pérdida* que ya hemos mencionado al hablar de la teoría de Kutta-Joukowski; es decir, que la magnitud de la circulación no puede ser calculada teóricamente cuando el ángulo de ataque excede de un cierto límite, como consecuencia de que la corriente se separa de la superficie. En segundo lugar, la teoría de la línea de sustentación no se puede aplicar alas en flecha. Si reemplazamos el ala en flecha, por una línea de sustentación, el cálculo falla porque la deflexión producida resulta matemáticamente infinita sobre la línea de sustentación. Finalmente, la teoría no da una buena aproximación en el caso de alas de pequeño alargamiento. Es decir, si la envergadura no es grande, en relación con la cuerda media del ala, no se puede suponer que la corriente en un plano perpendicular a la envergadura, pueda ser sustituida aproximadamente por una corriente bidimensional⁴⁴.



Fig. 27 Ludwig Prandtl (1875-1953) y F. G. Lanchester (1878-1946)

⁴³ Se han estudiado métodos gráficos y numéricos para resolver la ecuación integral uno de los primeros fue: SEARS, W. R. (1948) A New Treatment of Lifting-Line Wing Theory with Application to Rigid and Elastic Wing *Quarterly of Applied Mathematics*, 6, pp. 239 – 255.

⁴⁴Ver: BERTIN, J.J. (2002) *Aerodynamics for Engineers*. New Jersey, Prentice Hall, pp. 230-302. ANDERSON, J. D. (2001) *Fundamentals ... Op. Cit.* pp. 351 – 417.

5.- Resistencias en un perfil. Efectos de la viscosidad del fluido

Hasta ahora, se ha considerado que se despreciaban los efectos viscosos del fluido. Es decir, la existencia de fuerzas de fricción tangenciales a la superficie del cuerpo. Además el fluido permanecía adherido al cuerpo en toda su extensión. Pero cuando un cuerpo que se mueve a través de un fluido real, originalmente en reposo, aparece una fuerza paralela a la dirección del movimiento del cuerpo, que habíamos denominado resistencia (D), la resistencia se puede dividir, por su origen en tres tipos: la resistencia inducida, la resistencia de fricción y la resistencia de presión o de estela.

La resistencia inducida tiene su origen, como ya comentamos en la fuerza aplicada para efectuar el trabajo necesario para generar la deflexión, que será el origen de la sustentación en las alas de envergadura finita⁴⁵. La resistencia de fricción es la resultante de todas las fuerzas tangenciales tomadas en la misma dirección. La resistencia de estela es consecuencia de la fuerza resultante de todas las presiones en la dirección paralela a la dirección del fluido⁴⁶.

La resistencia inducida es nula si la envergadura es infinita. En este caso, como ya se vio, no es necesario efectuar trabajo alguno para obtener sustentación y, por consiguiente, no hay resistencia inducida. Las resistencias de fricción y de estela son nulas si despreciamos la fricción y suponemos que la corriente se adapta perfectamente al ala, tal como resulta en la solución matemática para fluidos no viscosos (paradoja de D' Alembert)⁴⁷ Sin embargo, en fluidos reales, en virtud de los efectos de fricción, las líneas de corriente no se acomodan a la superficie del cuerpo, sino que se separan en algún punto, dando origen corriente abajo a una región de torbellinos denominada estela. Como consecuencia, la presión sobre la parte posterior del cuerpo, no puede alcanzar valores tan altos como los que se deducen del cálculo para fluidos no viscosos, En virtud de que las presiones sobre la parte anterior y posterior no se equilibran, se origina una resistencia de presión, que es la llamada resistencia de estela.

Resistencia inducida

Para mostrar de qué parámetros depende la resistencia inducida, emplearemos una simplificación a la teoría de Lanchester-Prandtl, aplicando la teoría de la cantidad de movimiento.⁴⁸ Determinaremos las fuerzas que se originan en un perfil sometido a la corriente de un fluido, admitiendo la hipótesis de que el ala produce una desviación hacia abajo de la masa de aire contenida dentro de un cilindro de diámetro igual a la envergadura (Fig. 28). Con lo cuál tenemos que la variación de velocidad del fluido de ese cilindro (w), dará lugar a la aparición de una fuerza (R) en sentido contrario a dicho movimiento, que será igual a la variación de la cantidad de movimiento. Es decir, al producto de la masa del fluido (m) desviado por la variación de la velocidad. Así:

$$R = m \cdot w$$

⁴⁵ Ver página 20.

⁴⁶ Ver Fig. 9.

⁴⁷ Ver nota 28.

⁴⁸ Su desarrollo puede verse en varios tratados de aerodinámica, es interesante ver: LAFITA, F. (1945) *Aerodinámica aplicada*. Madrid, Nuevas Gráficas, S.A. pp.II.9-13.

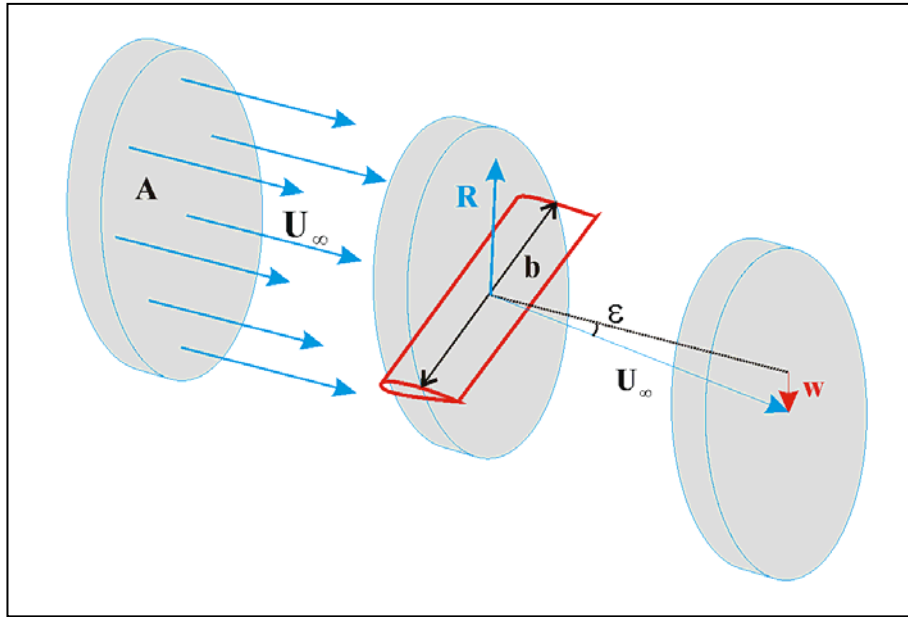


Fig. 28

De donde:

$$\left. \begin{aligned} m &= \rho \cdot A \cdot U_\infty \\ A &= \frac{\pi \cdot b^2}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m = \rho \cdot \frac{\pi \cdot b^2}{4} \cdot U_\infty$$

Y el ángulo de deflexión valdrá:

$$\epsilon = \frac{w}{U_\infty} \Rightarrow w = U_\infty \cdot \epsilon$$

Luego:

$$R = m \cdot w = \rho \cdot \frac{\pi \cdot b^2}{4} \cdot U_\infty \cdot U_\infty \cdot \epsilon$$

Asumiendo que $L \approx R$ y la definición de coeficiente de sustentación C_L ⁴⁹

$$\epsilon = \frac{R}{\rho \cdot \frac{\pi \cdot b^2}{4} \cdot U_\infty \cdot U_\infty} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} C_L &= \frac{L}{S \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_\infty^2} \\ R &\approx L \end{aligned} \right\} \Rightarrow \epsilon = \frac{C_L \cdot S}{\pi \cdot b^2 / 4}$$

⁴⁹ Ver Fig. 17.

Definiendo alargamiento⁵⁰ (λ):

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = \frac{b}{c} \\ S = c \cdot b \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = \frac{b^2}{S}$$

Entonces:

$$\varepsilon = \frac{2 \cdot C_L}{\pi \cdot \lambda}$$

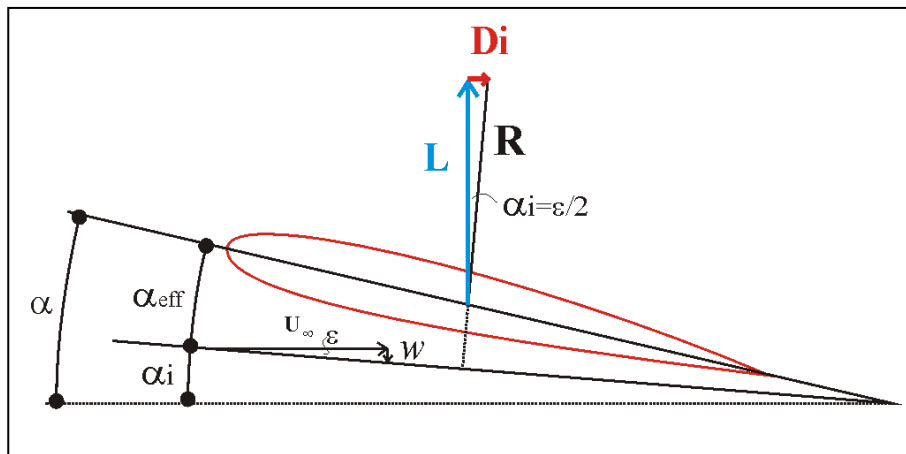


Fig. 29

Por la relación geométrica mostrada (Fig. 29) tenemos:

$$L = R \cdot \cos \frac{\varepsilon}{2} \approx R$$

$$D_i = R \cdot \operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2} \approx R \cdot \frac{\varepsilon}{2} \approx L \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

Según la definición de ángulo inducido (Fig. 21) se tiene:

$$\alpha_i = \frac{\varepsilon}{2} = \frac{C_L}{\pi \cdot \lambda}$$

Si definimos el coeficiente de resistencia inducida C_{Di} :

$$C_{Di} = \frac{D_i}{S \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_\infty^2}$$

⁵⁰ Ver nota 38.

Luego:

$$D_i = L \cdot \frac{\varepsilon}{2} = L \cdot \alpha_i \Rightarrow C_{Di} = \alpha_i \cdot C_L \Rightarrow C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi \cdot \lambda}$$

Por lo tanto, el coeficiente de resistencia inducida depende cuadráticamente del coeficiente de sustentación y es inversamente proporcional al alargamiento. Es decir para dos alas que tengan igual sustentación, la de más alargamiento tendrá menor resistencia inducida.

Se puede emplear la teoría de Lanchester – Prandl para la deducción de la expresión del ángulo y del coeficiente de resistencia inducido, si bien es más complicada se llega a la misma conclusión. A lo largo de la deducción de la fórmula mediante la aplicación de la teoría del momento se ha supuesto que la deflexión es constante a lo largo de la envergadura, esto es cierto si la distribución de circulación tiene la forma⁵¹:

$$\Gamma(y) = \Gamma_o \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot y}{b}\right)^2}$$

Y esta distribución es generada por un ala de planta elíptica:

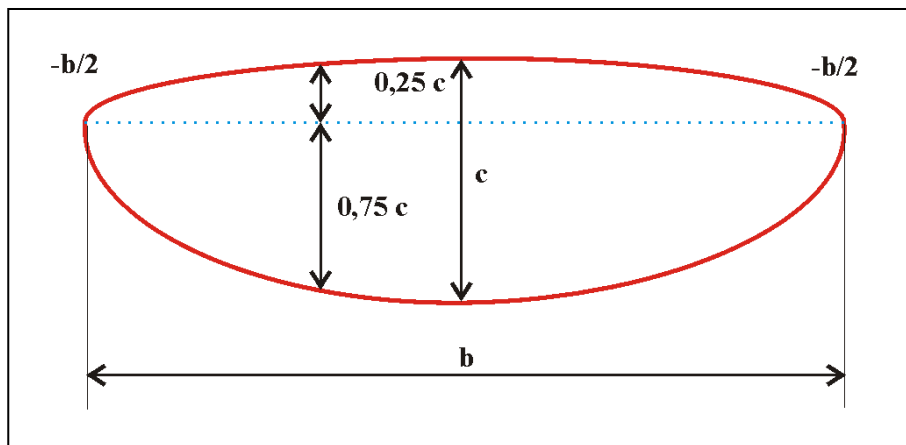


Fig. 30 Ala de Planta elíptica

Además Max Munk, que fue un discípulo de Prandtl, demostró en su tesis doctoral,⁵² leída en 1918 en la Universidad de Gotinga (Alemania), que esta distribución y forma elíptica del ala es con la que se logra que la resistencia inducida sea lo más pequeña posible.

Se puede deducir⁵³ la expresión del ángulo y coeficiente de resistencia inducido para

⁵¹ Ver desarrollo completo en: ANDERSON, J. D. (2001) *Fundamentals ...* Op. Cit. pp. 367 – 371.

⁵² MUNK, M. (1918) *Isoperimetrische Probleme aus der Theorie des Fluges*. Göttingen.

⁵³ Ver desarrollo completo en: ANDERSON, J. D. (2001) *Fundamentals ...* Op. Cit. pp. 371 – 375.

cualquier distribución de circulación, que implicará plantas de las distintas, su valor es:

$$\alpha_i = \frac{C_L}{e \cdot \pi \cdot \lambda} \quad C_{Di} = \frac{C_L^2}{e \cdot \pi \cdot \lambda}$$

Donde (e) es el conocido como factor de eficacia, que es un número comprendido entre 0,6 y 0,95, dependiendo de la geometría del ala.

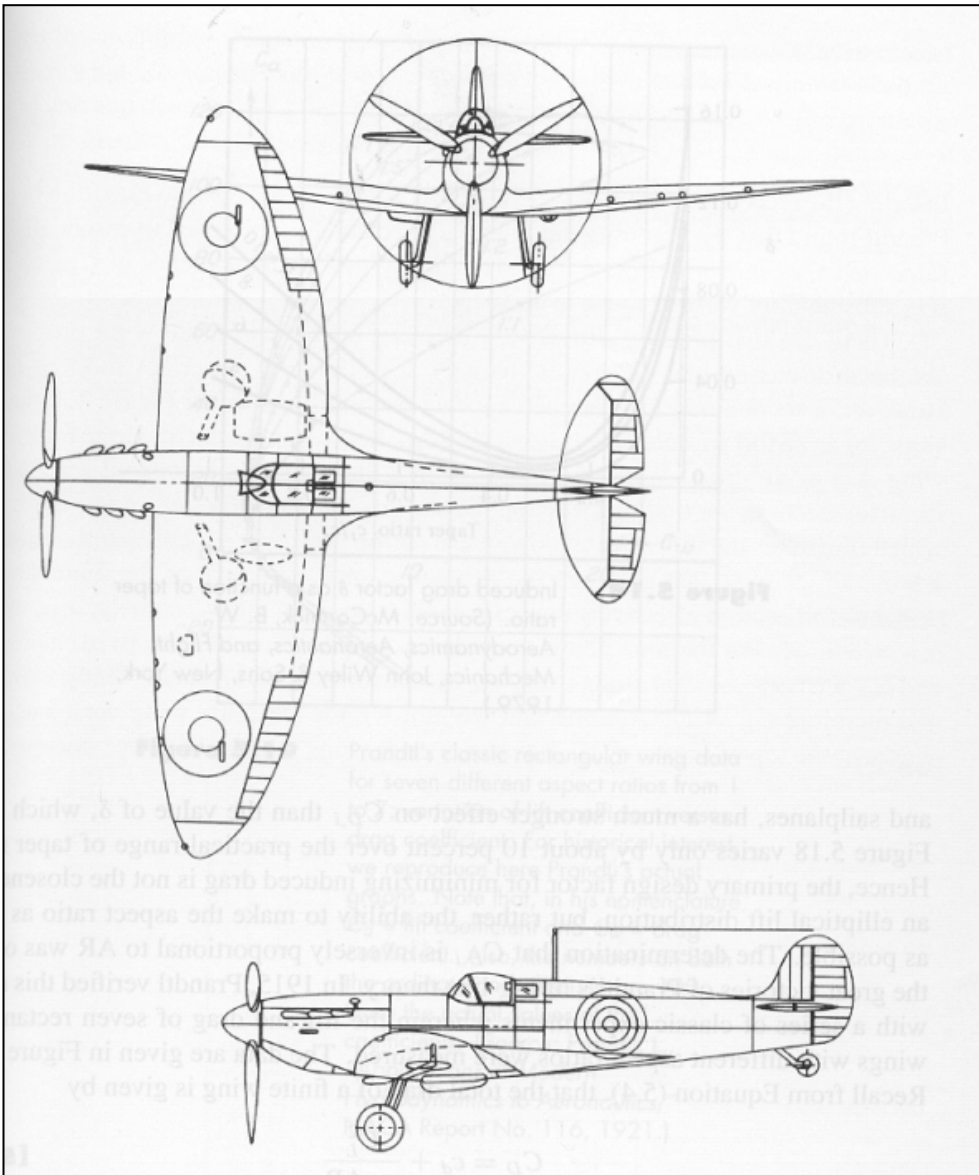


Fig. 31 Supermarine Spitfire, avión de combate durante la II Guerra Mundial, en el que se aprecia su ala elíptica.

Dependiendo del perfil de velocidades y del tipo de fluido,⁵⁶ una capa límite puede ser laminar o turbulenta. Si se estudia la capa límite de una placa plana (Fig. 33) se comprueba que cerca del borde de ataque, la capa límite es laminar. Esto quiere decir que el perfil de velocidades tiene una distribución lineal. Las fuerzas de rozamiento dentro de la capa disipan energía de la corriente de aire, y hacen que el espesor de la misma aumente paulatinamente, hasta que a cierta distancia del borde de ataque, empiecen a producirse perturbaciones que transforman el perfil de velocidades, que deja de ser lineal para transformarse en parabólico. Se dice que la capa límite es turbulenta. Cuando la capa es turbulenta se crea cerca de la superficie una subcapa laminar, de espesor muy pequeño.

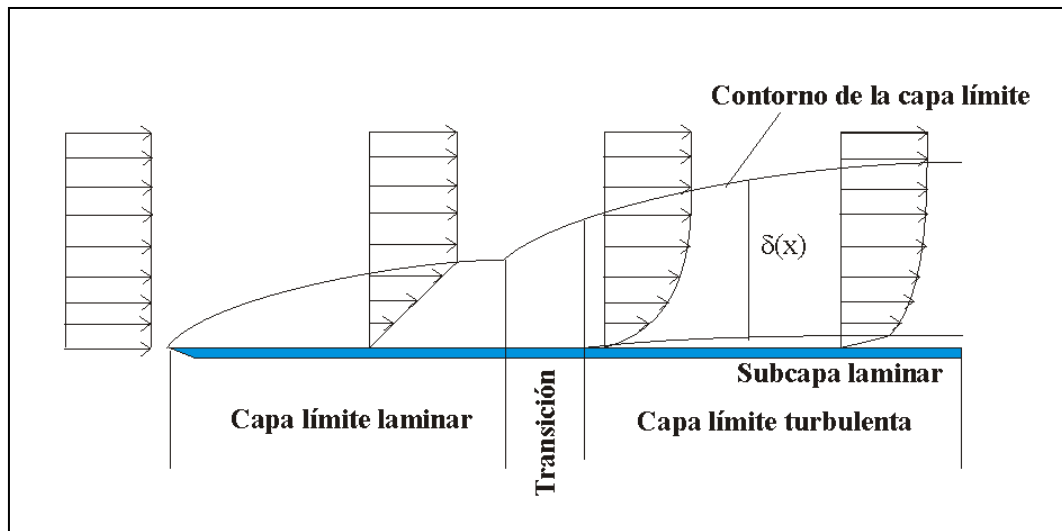


Fig. 33 Desarrollo de la capa límite en una placa plana.

Se demuestra⁵⁷ que debido a la distribución de velocidades una capa límite turbulenta presenta respecto a la laminar: Un mayor espesor, una mayor velocidad media de las partículas en su interior y una mayor resistencia de fricción, por lo tanto, es deseable que la capa límite sobre el perfil sea laminar.

Resistencia de estela

En el estudio de los flujos ideales⁵⁸ en torno a una superficie se suponía que el mismo se adaptaba perfectamente al contorno, sin embargo, para los fluidos reales, las líneas de corriente no se acomodan a la superficie del cuerpo, sino que se separan en un punto, dando origen corriente abajo a una región de torbellinos denominada estela. Esta separación se produce cuando la capa límite se desarrolla, en presencia de un gradiente de presiones adverso, es decir que la presión crezca en el sentido de la corriente.

El gradiente de presión adverso junto con el esfuerzo cortante en la pared, hacen que

⁵⁶ Ambos efectos se combinan mediante un coeficiente adimensional conocido como **Número de Reynolds** [$RN = (\rho \cdot V \cdot l) / \mu$], donde: ρ es la densidad, V la velocidad, l la distancia al borde de ataque y μ es el coeficiente de viscosidad. Si el RN es relativamente pequeño la capa límite es laminar y si es grande turbulenta.

⁵⁷ Ver desarrollo completo en: WHITE, F.W. (1988). *Mecánica de fluidos...* Op. Cit. pp. 429-488.

⁵⁸ Incompresibles y no viscosos.

disminuya la cantidad de movimiento dentro de la capa límite y, el fluido en el interior de la capa límite se irá frenando hasta alcanzar el reposo. En este instante, la línea de corriente que coincide con la pared se aleja de la superficie, produciéndose incluso un flujo inverso (Fig. 34), que hace que se produzca el desprendimiento de la capa límite, y se forma una estela detrás del cuerpo. Esto hace que la presión sobre la parte posterior del cuerpo no pueda alcanzar valores tan altos como los que se deducen del cálculo para fluidos no viscosos. Como ahora las presiones sobre la parte anterior y posterior no se equilibran, se origina una resistencia de presión, que es la llamada resistencia de estela.

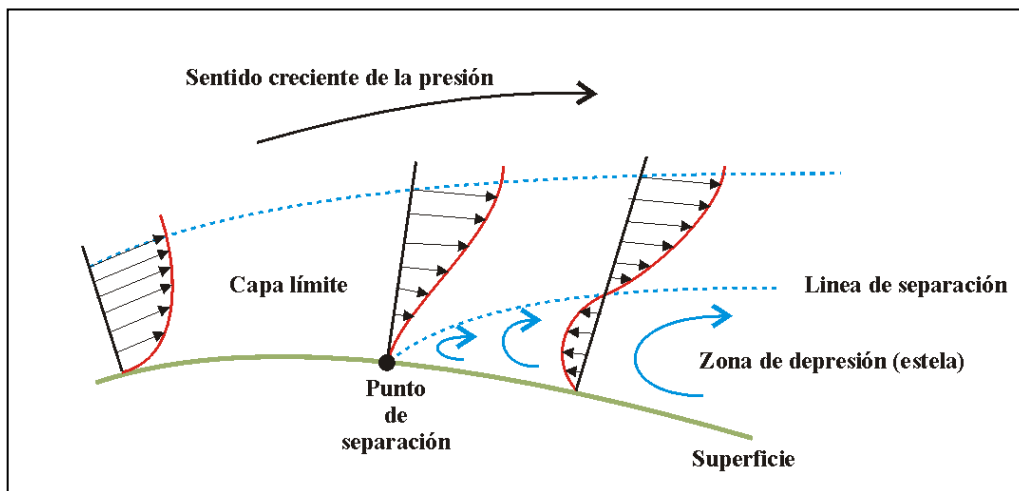


Fig. 34 Desprendimiento de la capa límite.

Esta resistencia depende de la forma de la estela, es decir que sea más o menos gruesa detrás del cuerpo y también de la forma del cuerpo.

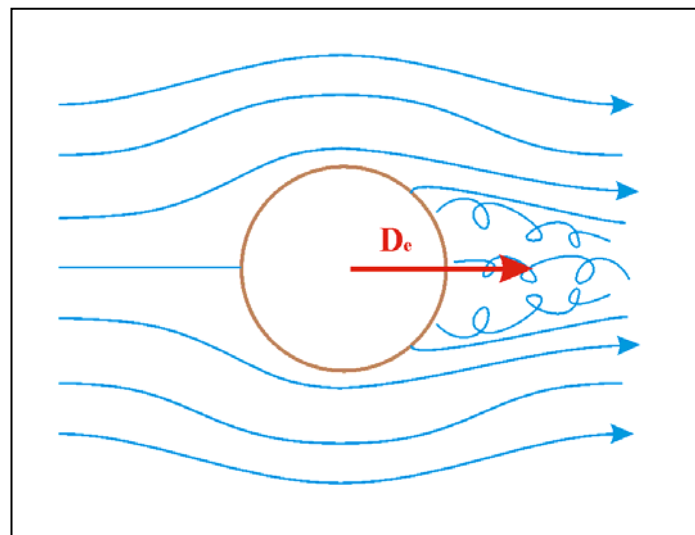


Fig. 35 Resistencia de estela.

En las fotografías mostradas en la (Fig. 36) se puede apreciar las diferentes estelas que se generan cuando la capa límite se separa en puntos distintos, cuanto más cerca aguas abajo se encuentre el punto de separación menor, será la estela y por lo tanto, la

resistencia. Se demuestra⁵⁹ que una capa laminar (a) se desprende antes que una turbulenta (b), por lo tanto la existencia de una capa turbulenta disminuye la resistencia de estela. Esta es la razón porque las pelotas de golf disponen hoyuelos en su superficie. Es para que la capa límite, sea lo más turbulenta posible y por tanto la separación se produzca lo más retrasado posible aguas abajo y la resistencia de estela sea menor.

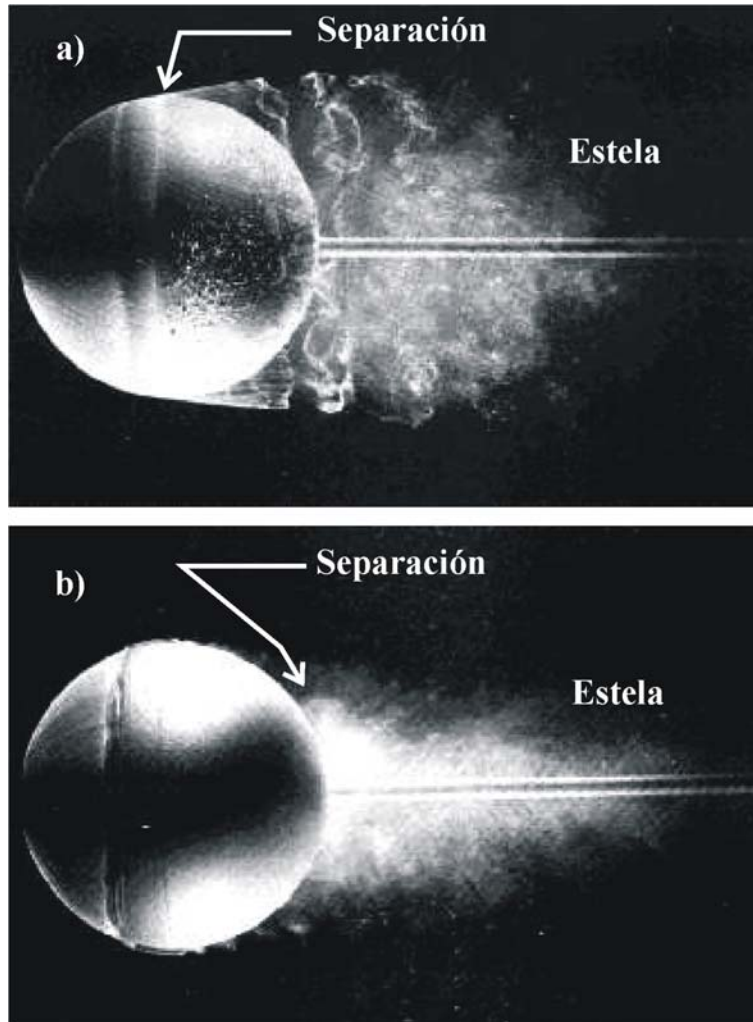


Fig. 36 Separación laminar (a) y turbulenta (b) en una bola dentro de una corriente de agua.

El otro método para reducir la resistencia de estela es conseguir que el cuerpo sea lo más esbelto posible. Con ello lograremos que el gradiente de presiones no sea muy elevado y por tanto retrasar el desprendimiento de la capa límite. Los cuerpos con forma pisciformes como los dirigibles son un ejemplo de ello.

Los perfiles se diseñan para que la separación de la capa límite, se produzca cerca del borde de fuga, siempre que el ángulo de ataque sea pequeño. Si el ángulo de ataque supera cierto límite, el aumento de presión sobre la parte superior del ala, deja de ser suficientemente gradual, y se produce la separación de la capa límite muy delante del borde de fuga. Esta situación, que habíamos denominado pérdida, hace que la resistencia aumente bruscamente y que decrezca la sustentación fuertemente (Fig. 37).

⁵⁹ Ver referencia nota 57.

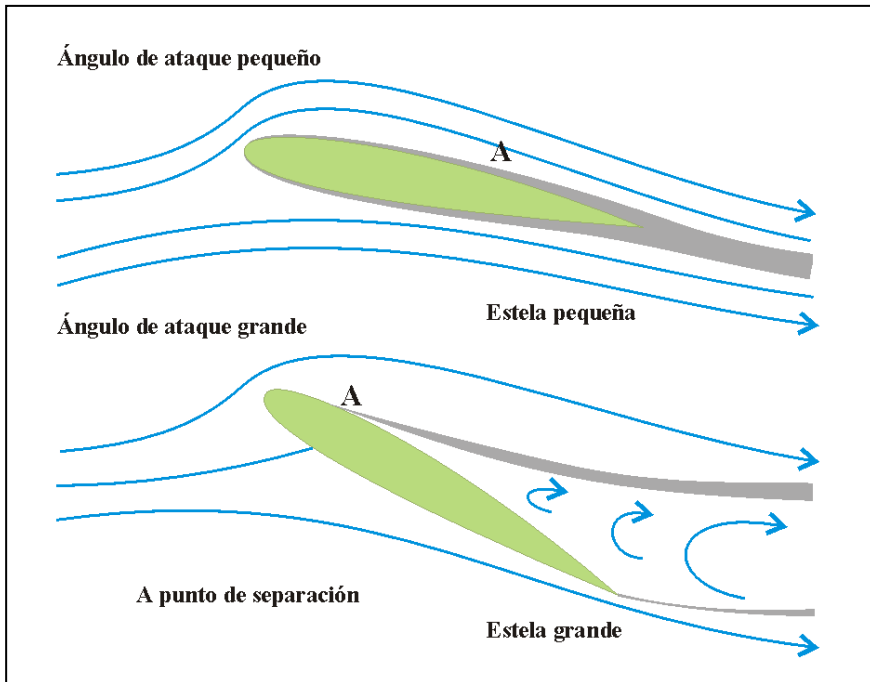


Fig. 37 Separación de la capa límite para grandes ángulos de ataque.

Curva polar de un perfil

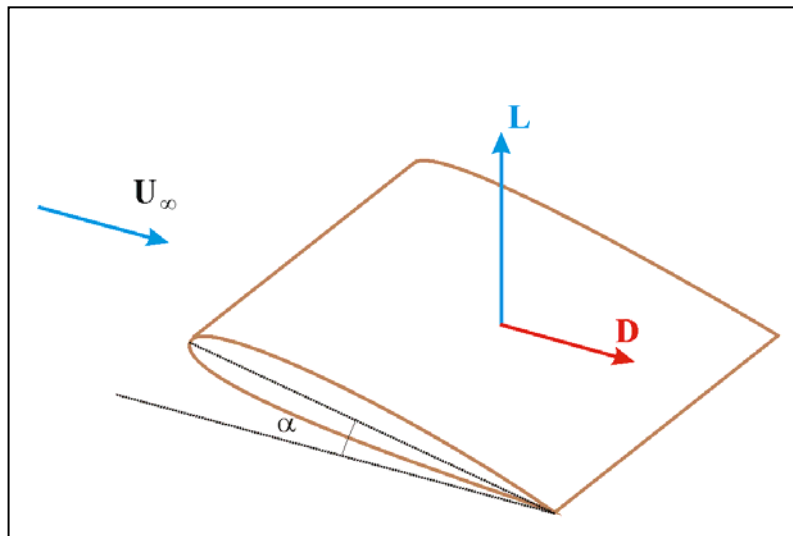


Fig. 38 Sustentación y resistencia total en un ala

La suma de la resistencia de fricción y de estela se denomina resistencia parásita (D_p), que sumada a la resistencia inducida (D_i) nos da la resistencia total (D), por lo tanto:

$$D = D_p + D_i \Rightarrow \left\{ C_{Dx} = \frac{D_x}{S \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_{\infty}^2} \right\} \Rightarrow C_D = C_{Dp} + C_{Di} \Rightarrow C_D = C_{Dp} + \frac{C_L^2}{e \cdot \pi \cdot \lambda}$$

Se puede trazar la curva C_D en función del ángulo de ataque, ya que se dispone C_L en función del ángulo α (Fig. 17) y C_{Dp} es independiente de la sustentación. También se puede dibujar la curva de C_L en función de C_D a esta curva se le denomina Curva polar (Fig. 39).

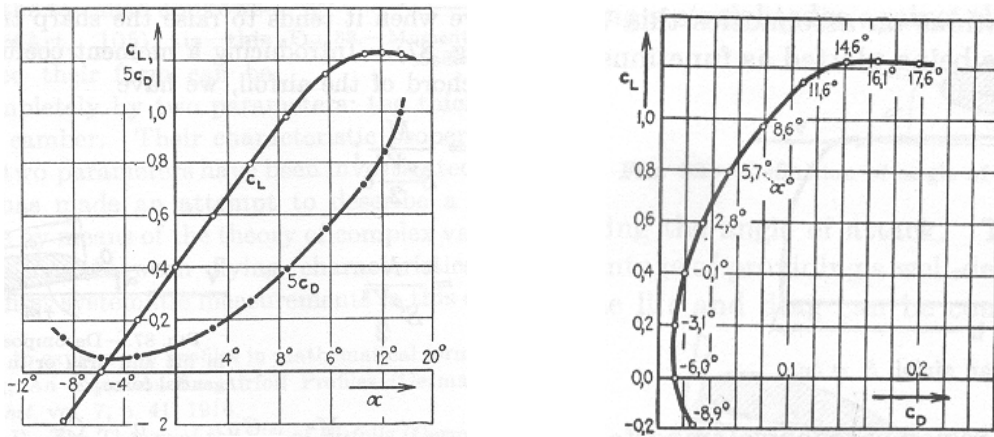


Fig. 39 C_L y C_D frente al ángulo de ataque (derecha) y curva polar (izquierda)⁶⁰

¿Cómo se genera la circulación?

Las propiedades de la capa límite también permiten dar una explicación física el origen de la circulación necesaria para la sustentación del ala.

La (Fig. 40A) muestra el instante que el ala se pone en movimiento a partir del reposo todavía no existe circulación. El diseño geométrico del perfil hace que el ala al moverse el flujo presente un punto de estancamiento sobre la superficie superior, antes del borde de fuga, y la velocidad es singular⁶¹ en el filo del borde de fuga. Pero como el flujo no es ideal, los efectos de la viscosidad, hacen que la capa límite de la parte inferior del ala se desprenda en el borde de fuga, generando un torbellino. Éste interactúa con la región no viscosa del flujo, haciendo que el punto de estancamiento superior se desplace hacia el punto de separación (Fig. 40B). Este torbellino denominado de arranque,⁶² es arrastrado por la corriente aguas abajo (Fig. 40C). Esta descarga vorticosidad en el fluido genera la circulación alrededor del perfil, igual y opuesta al torbellino de arranque, origen según el teorema de Kutta-Joukowski de la sustentación. Si el perfil se detiene se origina un torbellino de parada que tiene sentido opuesto al de arranque, consecuencia de la desaparición de la circulación. Éste se puede ver en la Fig. 41.

Es interesante apreciar que la generación de la circulación, es consecuencia de las fuerzas de fricción que aparecen en la capa límite del fluido.

⁶⁰ PRANDTL, L.; TIETJENS, O.G. (1957) *Applied Hydro...* Op. Cit. pp. 147-148.

⁶¹ La solución para el flujo ideal da que la velocidad en el borde es infinita. Ver: WHITE, F.W. (1988). *Mecánica de fluidos...* Op. Cit. pp. 520-524.

⁶² En inglés: *Shed vortex*.

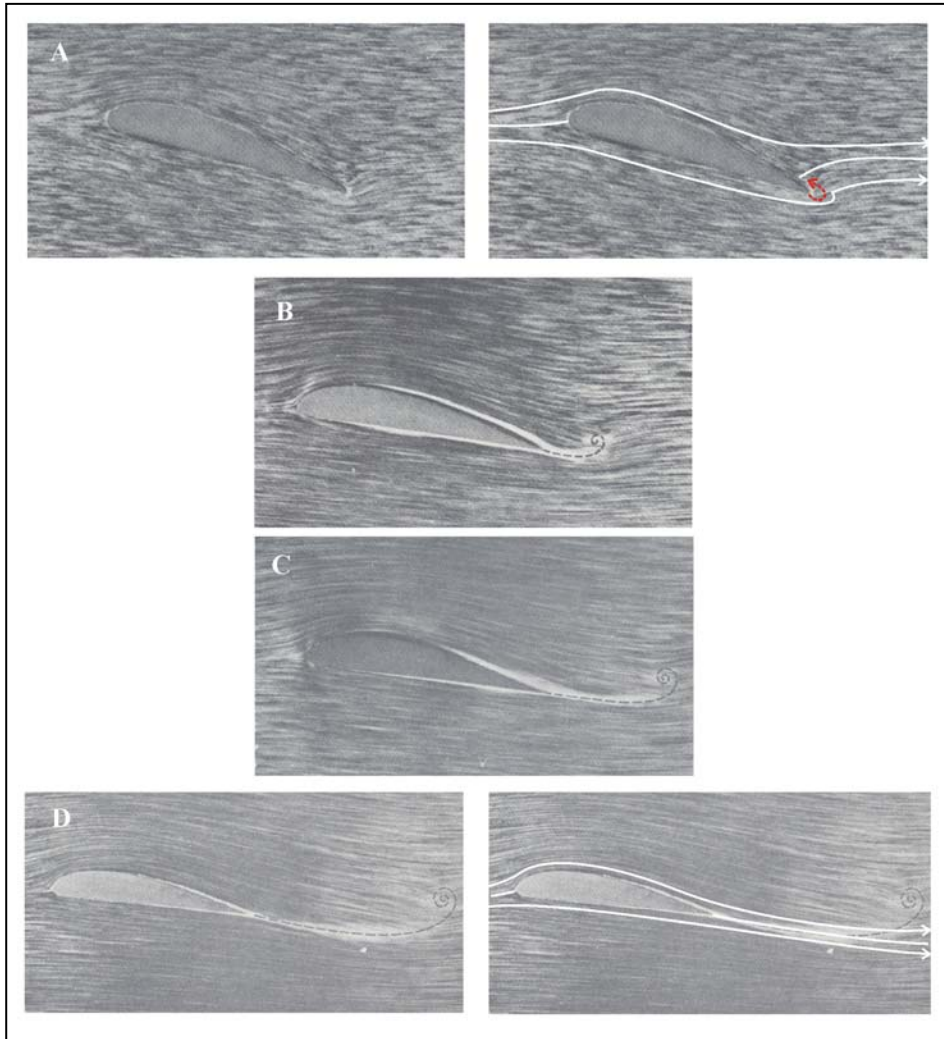


Fig. 40 Fotografías en un túnel de viento de las líneas de corriente alrededor de un perfil. En (A) se inicia el movimiento, el punto de remanso del borde de fuga esta en la parte superior del perfil, no hay sustentación, se genera un torbellino en el borde afilado. (B), (C) y (D) el torbellino es arrastrado por la corriente, situándose ahora el punto de remanso en el borde de fuga.⁶³

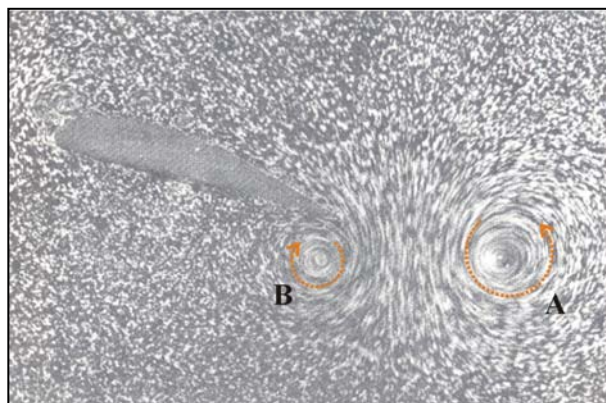


Fig. 41 Fotografía de un túnel de viento, en el que el perfil después de haber desprendido el torbellino de arranque (A) se para, generando el torbellino de parada (B).⁶³

⁶³ Fotografías extraídas de: PRANDTL, L.; TIETJENS, O.G. (1957) *Applied Hydro...Op. Cit.*

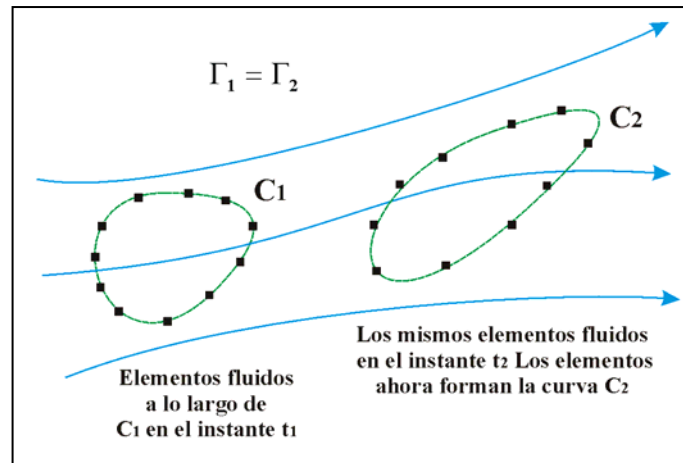


Fig. 42 Teorema de la Circulación de Kelvin

Pero: ¿Por qué el torbellino de arranque genera la circulación?

Antes hay que introducir el Teorema de la Circulación de Kelvin, que establece si tenemos en un fluido cualesquiera incompresible y no viscoso. Si en el instante t_1 trazamos una curva C_1 formada por elementos fluidos (Fig. 42) y calculamos su circulación:

$$\Gamma_1 = \oint_{C_1} \vec{V} \cdot d\vec{s}$$

Pasado un tiempo en el instante t_2 los elementos fluidos se habrán desplazado a lo largo de la corriente, y formarán ahora otra curva C_2 . Su circulación será ahora:

$$\Gamma_2 = \oint_{C_2} \vec{V} \cdot d\vec{s}$$

Kelvin⁶⁴ demostró que la circulación permanece constante:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2$$

Consideremos ahora curva (a b c d a) suficientemente grande como para estar íntegramente afuera de esas regiones desde el inicio del movimiento (Fig. 43). Puesto que el estado inicial es de reposo, la circulación alrededor de ese circuito es nula inicialmente ($\Gamma = 0$) y por el Teorema de Kelvin sigue siendo nula en todo tiempo posterior. Si ahora dividimos el circuito en dos partes, una de los cuales (a b c e a) rodea al perfil pero no la estela y al torbellino de arranque, y la otra (a e c d a) rodea la estela y el torbellino pero no el perfil.

⁶⁴ El inglés Sir William Thomson, Lord Kelvin, (1824-1907) dedujo este principio basándose en el trabajo del físico alemán Hermann Helmholtz (1821-1894): HELMHOLTZ, H. (1858), Ubre Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 55, pp. 25-55. Hay un importante resumen en: PRANDTL, L.; TIETJENS, O.G. (1934) *Fundamentals of Hydro- and aeromechanics*. Dover Publications, Inc, pp. 189 – 223.

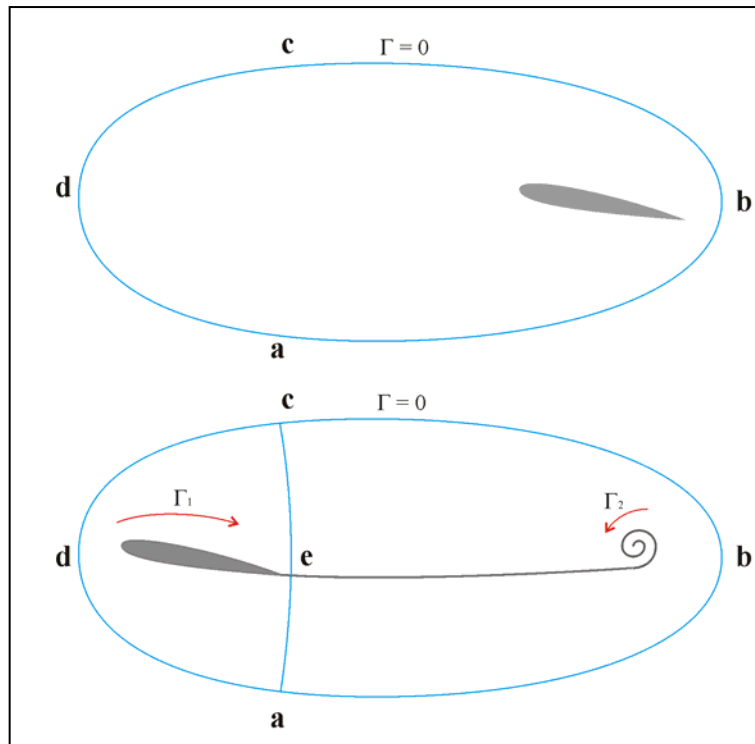


Fig. 43

Por lo tanto:

$$\Gamma = \Gamma_2 - \Gamma_1 = 0 \Rightarrow \Gamma_1 = \Gamma_2$$

Por lo tanto el torbellino de arranque es la causa de que exista circulación en el perfil.



Fig. 44 Sir William Thomson, Lord Kelvin, (1824-1907)

6.- ¿Se puede explicar conceptualmente por que vuela un avión?

En el apartado anterior hemos desarrollado el modelo matemático que explica como se genera la sustentación en el ala de un avión a velocidades subsónicas⁶⁵. Como todo modelo teórico tiene la dificultad de alejarnos de la realidad, entendida esta como la idea intuitiva que tenemos de cómo funciona el mundo físico, sin caer en planteamientos filosóficos, a la teoría de la circulación, base para entender como vuela un avión, le pasa como a la mecánica cuántica y a la relatividad, son difíciles de divulgar.

Teorías incorrectas sobre la generación de la sustentación

Al intentar “popularizar la teoría” han surgido explicaciones conceptualmente falsas que suelen aparecen en algunos libros de texto o de divulgación más a menudo de lo que sería deseable, veamos las más corrientes:

- 1) Principio del recorrido del perfil en el mismo tiempo equivalente.

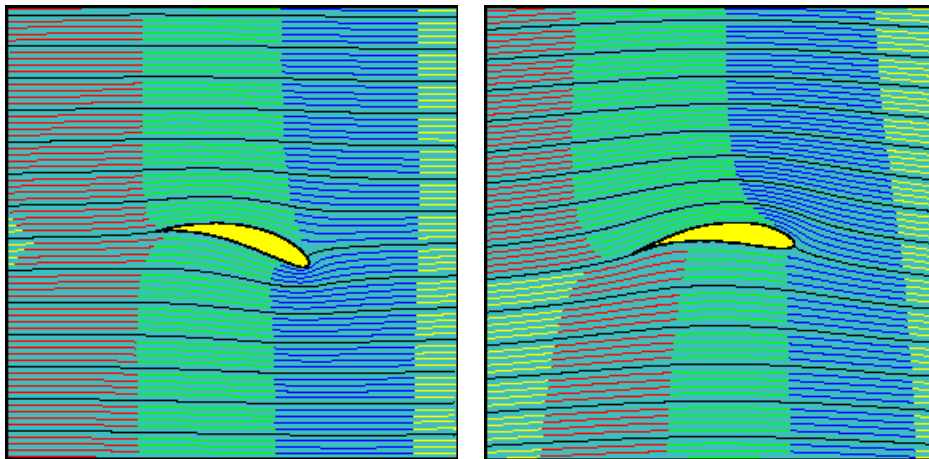


Fig. 45 Trayectoria de las partículas al atravesar un perfil con sustentación nula (izquierda) y con sustentación

Es sin lugar a dudas el más popular, para explicar diferencia de velocidades que llena el aire por encima y por debajo de un perfil, se razona de la siguiente manera: “las partículas del fluido que llagan al borde de ataque deben salir a la vez por el borde de fuga, pero como el camino a recorrer es más largo por la parte superior, la velocidad debe ser mayor que por la parte inferior”. Esta explicación es falsa, ya que las partículas no tienen porque llagar a la vez al borde de salida, de hecho, no lo hacen como muestra en la Fig. 45. Si no existe sustentación (Fig. 45 izquierda), las partículas de fluido que han entrado teñidas de rojo poseen la misma velocidad por encima y por debajo del

⁶⁵ A velocidades por encima del 50 % de la velocidad del sonido, la hipótesis del aire como flujo incompresible deja de ser ciento y por tanto las ecuaciones no son válidas. A finales de los años cuarenta del siglo XX la evolución de la tecnología en la propulsión de los aviones hizo que se alcanzasen velocidades cercanas a la del sonido, entonces surgieron nuevos problemas que desencadenaron en el estudio de la aerodinámica supersónica, sobre la evolución de la misma ver: KARMAN, T (1954) *Aerodinámica...* Op. Cita. pp. 107-145 y ANDERSON, J. (2002) *The airplane. A History of its Technology*, Reston VA (USA), American Institute of Aeronautics and Astronautics, pp. 283-359.

perfil, en cambio si existe sustentación no llegan a la vez (Fig. 45 derecha).

2) Teoría del Venturi.

Con esta explicación se pretende explicar la diferencia de velocidades por medio del llamado “Efecto Venturi”⁶⁶. La presencia del perfil y su forma hace que se produzca un estrechamiento entre el fluido sin perturbar y la superficie superior del ala. Si el fluido se considera incompresible la ecuación de continuidad⁶⁷ establece que al pasar el aire de una sección mayor a otra menor su velocidad debe aumentar, esta es la razón por la que existe una mayor velocidad en la parte superior del perfil. Esta teoría es falsa, ya que en realidad no se forma tal estrechamiento.

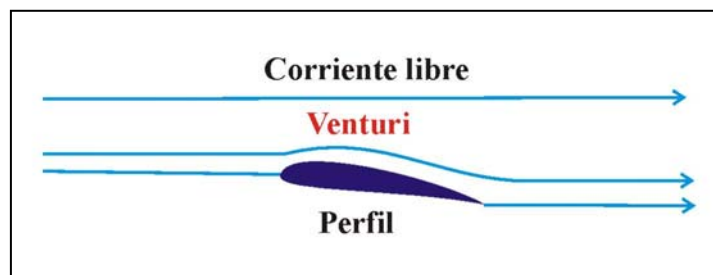


Fig. 46 Formación del “falso” Venturi.

3) Teoría de impacto.

A pesar de los años se sigue usando la teoría de impacto para explicar la sustentación de un perfil, tal como se muestra en la Fig. 47.

Es falso que el aire al chocar contra el perfil se comporte como si disparásemos perdigones y se produzca un intercambio de cantidad de movimiento con el perfil.

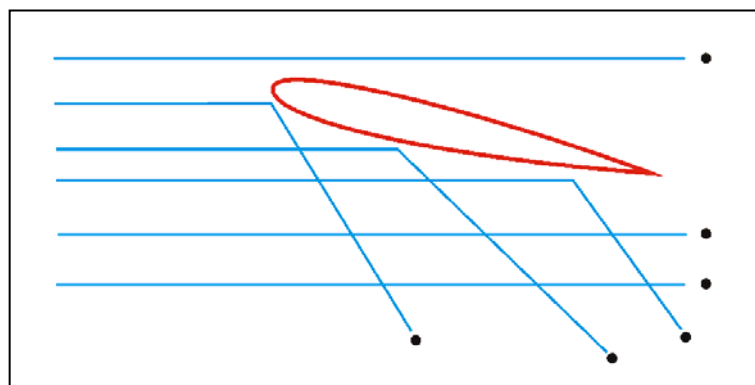


Fig. 47

⁶⁶ En honor al filósofo natural italiano G. B. Venturi (1746 – 1822). Ver TOKATY, G. A. (1971) *A history and philosophy of fluid mechanics*. New York, Dover publications, pp.84-5.

⁶⁷ La ecuación de continuidad establece que a lo largo de un tubo de corriente, el caudal másico (el producto de la densidad, la superficie que atraviesa el fluido y su velocidad) se conserva si no hay fuentes ni sumideros de flujo.

¿Como podíamos introducir conceptualmente lo que pasa en un perfil aerodinámico, de acuerdo con lo que establece la teoría de la circulación?

Podríamos iniciar la explicación mostrando como aparece la circulación, que no es un artificio matemático sino que posee una realidad física. La Fig. 48 manifiesta la aparición del torbellino en el borde de salida.

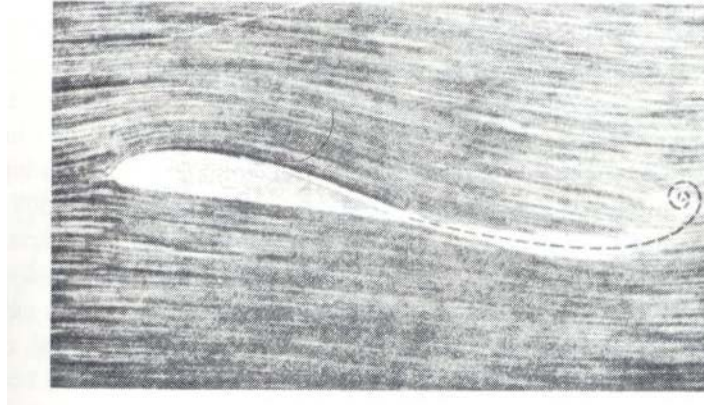


Fig. 48

Este torbellino se genera, al poner en movimiento un perfil con cierto ángulo de ataque en el seno del fluido, luego si se ha producido esta rotación en el fluido, ésta debe ser consecuencia de otra rotación en sentido opuesto del resto del fluido, según la ley de conservación del momento de la cantidad de movimiento. Esta rotación corresponde a la circulación alrededor de la sección del ala. Por lo tanto es la peculiar geometría del perfil es la que genera la circulación.

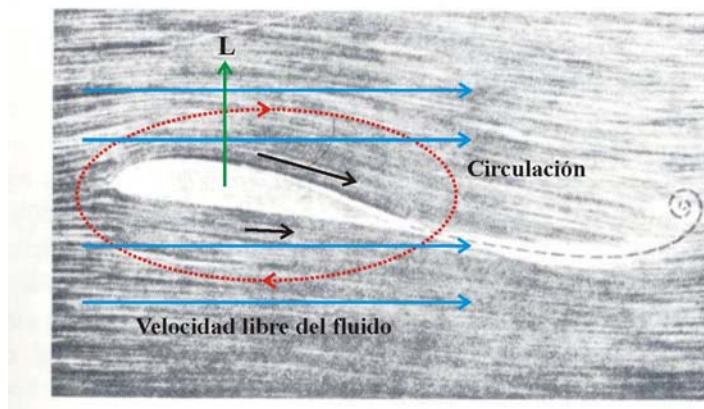


Fig. 49

La circulación hace que se genere una velocidad mayor sobre la superficie superior, así como una velocidad menor en la superficie inferior, ya que se suma con su signo a la velocidad libre del fluido (Fig. 49). Si aplicamos el teorema de Bernoulli, que es una manifestación del principio de conservación de la energía, se crea una diferencia de presiones entre ambas caras del perfil que da como resultado la sustentación (L).

Hay que destacar que para entender esta explicación hay introducir antes una serie de conceptos, algunos de ellos no muy triviales, como son: la hipótesis de que el fluido es

un medio continuo, la definición de presión estática y dinámica, el teorema de Bernoulli, los principios de conservación de la energía y del momento de la cantidad de movimiento y por supuesto las leyes de Newton.

Dada la cantidad de conceptos físicos implicados hay autores que prefieren partir de la tercera ley de Newton y explicar la sustentación como la reacción generada al producirse una variación en la dirección del fluido al encontrarse con el obstáculo que es el ala⁶⁸. Si bien esta explicación es un poco más simple, y conceptualmente más débil, es la preferida por los pilotos, ya que explica de una manera “cualitativa” ciertos fenómenos que ocurren en las alas finitas de los aviones, como puede ser la resistencia inducida o el efecto suelo⁶⁹. El defecto de esta explicación es la ausencia de la circulación como explicación del torbellino de salida.

6.- Conclusiones

- Está claro que entender como vuela un avión no es fácil, no se basa en un principio tan simple como el vuelo de los aerostatos o globos, esta es la causa de que nadie se plantee un estudio riguroso del tema en los temarios de física general, cosa que si ocurre con los globos.
- Por otra parte el análisis cualitativo de los fenómenos del vuelo (sustentación, velocidad, pérdida, efecto suelo, etc.) que es lo que interesa al piloto, puede ser abordado con ayuda de la explicación de la sustentación como variación de la cantidad de movimiento del fluido. Por lo tanto sobran explicaciones complejas, y no es extraño que aparecieran preconceptos falsos.
- Es difícil abordar tareas de divulgación científica que sean atractivas para el público, fuera de la relatividad o la mecánica cuántica, ¿qué pocos libros abordan con seriedad la divulgación de los fenómenos físicos? Por lo tanto ¿quién se atreve a realizar un libro de divulgación sobre los fluidos?
- Se puede abordar el estudio de la aerodinámica por medio de experimentos⁷⁰, realizados con ayuda de materiales sencillos, en los que se muestren los fenómenos físicos asociados al vuelo de un avión. Este punto sería objeto de un taller, que si es de interés, podría plantearse como actividad de las próximas Jornadas

En este estado de cosas ¿qué tenemos que responder cuando nos preguntan por que vuela un avión? La respuesta como diría la canción esta en el viento...

⁶⁸ Ver el aparatado de la resistencia inducida (página 27).

⁶⁹ La descripción de estos fenómenos se escapan al contenido de esta ponencia, si quiere alguien profundizar en el tema ver: ISIDORO CARMONA, A. (2000), *Aerodinámica y actuaciones del avión*, Madrid, Editorial Paraninfo.

⁷⁰ Imprescindible: HOSKING, W. (1990) *Flights of Imagination. An introduction to aerodynamics*. Washington DC, National Science Teacher Association.

Bibliografía

- ALAMBERT, J. (1752) *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*. Paris.
- ANDERSON, J. (2002) *The airplane. A History of its Technology*, Reston VA (USA), American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- ANDERSON, J. D. (2001) *Fundamentals of Aerodynamics*. Boston, McGraw Hill.
- BERTIN, J.J. (2002) *Aerodynamics for Engineers*. New Jersey, Prentice Hall.
- CAYLEY, G. (1809) On Aerial Navigation. Part I. *A Journal of Natural Philosophy, Chemistry, and the Arts*, vol. 24, pp. 167 – 174.
- CAYLEY, G. (1809) On Aerial Navigation. Part III. *A Journal of Natural Philosophy, Chemistry, and the Arts*, vol. 24, p. 161 - 169.
- CAYLEY, G. (1810) On Aerial Navigation. Part II. *A Journal of Natural Philosophy, Chemistry, and the Arts*, vol. 25, pp. 81 – 87.
- CHANUTE, O. (1997) *Progress in flying Machines. Republication of the work first published in 1894*. Nueva York, Dover Publications.
- CRADDOCK, D. (1994) *A., Construction Drawings for a selection of kites designed by Lawrence Hargrave, y A Revensbourne to Airborn*.
- EULER, L (1755). Continuation des recherches sur la théorie de mouvement des fluides, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres, Vol XI*, Berlin.
- EULER, L (1755). Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres, Vol XI*, Berlin.
- EULER, L (1755). Principes généraux du mouvement des fluides, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres, Vol XI*, Berlin
- HARGRAVE, L, (1893) Cellular Kites, *Engineering Vol 56, Oct 27*, pp. 523-24.
- HARGRAVE, L, 1895, Experiments on Kites *Engineering Vol 59, Feb 15*, p. 221.
- HERRERA, E. (1936) *Aerotecnia*, Madrid, Gráficas Ruiz Ferri.
- HOSKING, W. (1990) *Flights of Imagination. An introduction to aerodynamics*. Washington DC, National Science Teacher Association.
- ISIDORO CARMONA, A. (2000), *Aerodinámica y actuaciones del avión*, Madrid, Editorial Paraninfo.
- JOUKOWSKI, N. (1916) *Aérodynamique*. Pasis Gauthier – Villars et C^{ie} Éditeurs.
- KARLSON, P. (1940) *El hombre vuela. Historia y técnica del vuelo*. Barcelona, Editorial Labor.
- KARMAN, T (1954) *Aerodinámica. Temas seleccionados a la luz de su desarrollo histórico*. Madrid, INTAET.
- KUTTA, M.W. (1902) Auftriebskräfte in strömenden Flüssigkeiten. *Illustrierte Aeronautische Mitteilungen* 6, pp. 133-135.
- LAFITA, F. (1945) *Aerodinámica aplicada*. Madrid, Nuevas Gráficas, S.A.
- LAGRANGE, J. L. (1781) Mémoir sur la théorie de mouvement des fluides. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres, Vol XI*, Berlin.

LANGLEY, S. P. (1891) Experiments in Aerodynamics. *Contributions to Knowledge n° 801. Smithsonian Institution*. Washington.

LILIENTHAL, O. (1889) *Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst*, Berlin.

MAGNUS, G. (1852) On the derivation of projectiles; and on a remarkable phenomenon of rotating bodies. *Memoirs of the Royal Academy, Berlin*. traducción al inglés en *Scientific Memoirs, London* (1853), p. 210. Editada por John Tyndall and William Francis.

NEWTON, I (1987) *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural* Madrid Alianza Editorial, tercera edición de 1726, traducción E. Rada.

MUNK, M. (1918) *Isoperimetrische Probleme aus der Theorie des Fluges*. Göttingen.

PHILLIPS, H. F. (1885). Experiments with Currents of Air. *Engineering* 40, pp 160 – 161.

PRANDTL, L. Tragflügeltheorie. *Göttinger Nachrichten, mathematisch-physikalische Klasse*, pp. 451-477. Existe traducción al inglés: PRANDTL, L.; TIETJENS, O.G. (1957) *Applied Hydro- and Aeromechanics* New Cork, Dover Publications, Inc, pp. 185 – 225.

PRANDTL, L.; TIETJENS, O.G. (1934) *Fundamentals of Hydro- and aeromechanics*. Dover Publications, Inc.

RAYLEIGH, LORD (1877) On the Irregular Flight of a Tennis Ball. *Messenger of Mathematics*, 7, 14.

ROUGHLEY, T.C. (1937). *The Aeronautical Work of Lawrence Hargrave*. Sydney, David Harold Paisley, Government Printer.

SEARS, W. R. (1948) A New Treatment of Lifting-Line Wing Theory with Application to Rigid and Elastic Wing *Quarterly of Applied Mathematics*, 6, pp. 239 – 255.

SHAW, W. H. (1977) *Lawrence Hargrave: Explorer, Inventor and Aviation Experimenter*, Stanmore, Cassell Australia.

SMEATON, J. (1759) An experimental enquiry concerning the natural powers of water and wind to turn mills, and other Machines depending on a circular motion. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, vol. 51. Londres.

TOKATY, G. A. (1971) *A history and philosophy of fluid mechanics*. New York, Dover publications.

WHITE, F.W. (1988). *Mecánica de fluidos*. Mejico, McGraw Hill.